

5. Analiza în frecvență

Răspunsul unui sistem la o intrare armonică (componenta permanentă) este :

$$y_p(t) = H(j\omega) \cdot e^{j\omega t} = (|H(j\omega)| \cdot e^{j \cdot \arg(H(j\omega))}) \cdot e^{j\omega t} = (A(\omega) e^{j\varphi(\omega)}) \cdot e^{j\omega t} = A(\omega) e^{j(\omega t + \varphi(\omega))}$$

unde **atenuarea** raspunsului la frecventa este

$$A(\omega) = |H(j\omega)| = \sqrt{\operatorname{Re}^2(\omega) + \operatorname{Im}^2(\omega)}$$

iar **faza** raspunsului la frecventa sistemului

$$\varphi(\omega) = \arg H(j\omega) = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im}(\omega)}{\operatorname{Re}(\omega)}$$

Reprezentarea în frecvență (pulsatie) a funcției de transfer se poate realiza prin reprezentarea dependenței numărului complex $H(j\omega)$ de ω pentru $\omega \in (-\infty, \infty)$ sau $\omega \in [0, \infty)$

$$H(j\omega) = \operatorname{Re}(\omega) + j \operatorname{Im}(\omega) = U(\omega) + jV(\omega)$$

Analiza în frecvență a unui sistem constă în studiul regimului permanent al mărimii de ieșire la o intrare armonică de amplitudine constanta și pulsatie (frecvență) variabilă.

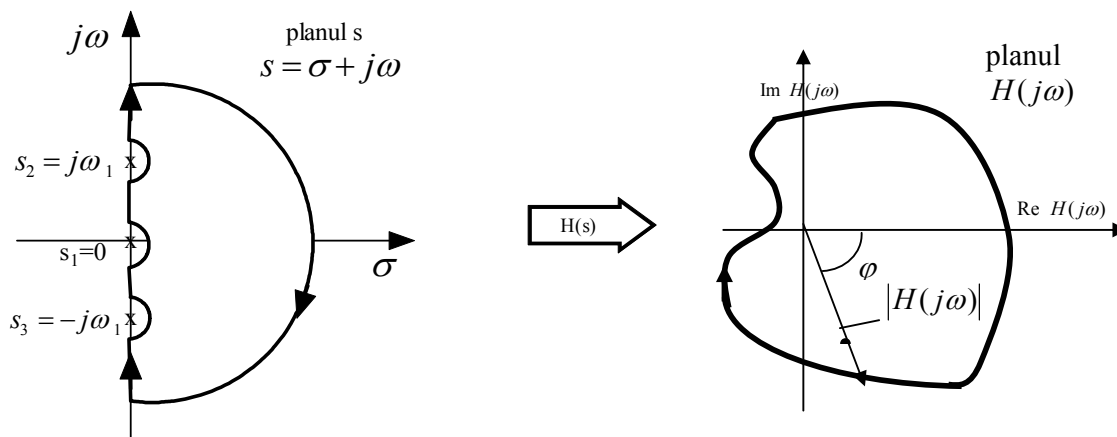
5.1. Locul de transfer

Locul de tranfer (hodograful sau locul lui Nyquist) este o reprezentare de tipul coordonatelor polare într-un plan ce are drept axe $\operatorname{Re} H(s)$, $\operatorname{Im} H(s)$.

Reprezentarea analitică a locului de transfer este privită ca o transformare conformă a unui contur din planul s denumit contur Nyquist.

Conturul Nyquist este un contur închis cu următoarele proprietăți:

- porțiunea sa principală este pe axa imaginară $s = j\omega$
- eventuali poli pe care $H(s)$ îi are pe axa imaginară sunt înconjurați sau evitați cu semicercuri de rază ∞ mic ($R \rightarrow 0$) situați în semiplanul drept
- închiderea conturului Nyquist se face printr-un semicerc de rază ∞ mare ($R \rightarrow \infty$) ce cuprinde întreg semiplanul drept al planului s .



Construcția detaliată a locului de transfer revine la transformarea următoarelor porțiuni :

- 1) axa imaginară
- 2) semicercul ce înconjoară originea
- 3) semicercurile ce înconjoară polii pur imaginari ai lui $H(s)$ dacă aceștia există
- 4) semicercul de rază infinită

Trasarea efectivă a locului de transfer se face pentru domeniul $\omega \in [\infty, 0)$, pentru domeniul $\omega \in (-\infty, 0)$ luându-se simetricul curbei față de axa reală deoarece se poate demonstra că:

$$\begin{aligned}U(\omega) &= U(-\omega) \\V(\omega) &= -V(-\omega)\end{aligned}$$

Se consideră funcția de transfer sub forma:

$$H(s) = \frac{K}{s^q} \cdot \frac{r(s)}{p(s)} = \frac{K}{s^q} \cdot \frac{(1 + b_1s + \dots + b_ms^m)}{(1 + a_1s + \dots + a_ns^n)} \quad q \in Z, k \in R, \text{ si } r(0) = p(0) = 1$$

și următoarele notații:

K factorul de amplificare

q tipul funcției de transfer

e excesul polilor față de zerouri

$$e = \text{grad}[p(s)] - \text{grad}[r(s)]$$

După cum se va vedea **q** interesează comportarea la joasă frecvență a sistemului iar **e** comportarea la înaltă frecvență.

• **Comportarea în joasă frecvență ($\omega \rightarrow 0$)**

$$H(s)\Big|_{s \rightarrow 0} = \left(\frac{K}{s^q} \cdot \frac{(1 + b_1 s + \dots + b_m s^m)}{(1 + a_1 s + \dots + a_n s^n)} \right)\Big|_{s \rightarrow 0} \cong \frac{K}{s^q}\Big|_{s \rightarrow 0}$$

Pentru $q \geq 1$ se face o dezvoltare în serie Taylor în jurul punctului de zero:

$$H(s) = \frac{K}{s^q} \cdot [c_0 + c_1 s + c_2 \cdot s^2 + \dots + c_q \cdot s^q + c_{q+1} \cdot s^{q+1} + \dots]$$

comportarea locului în jurul lui $s \rightarrow 0$ este dată de relația

$$H(s)\Big|_{s \rightarrow 0} = K \left[\frac{c_0}{s^q} + \frac{c_1}{s^{q-1}} + \dots + c_q \right]\Big|_{s \rightarrow 0}$$

deoarece în jurul lui $s=0$ nu mai conteaza termenii de la un rang mai mare decat q .

Comportarea locului în jurul $\omega \rightarrow 0(0_+)$ este data de relația

$$H(j\omega) = K \left[\frac{c_0}{(j\omega)^q} + \frac{c_1}{(j\omega)^{q-1}} + \dots + c_q \right] = U(\omega) + jV(\omega)$$

ce ne permite, prin eliminarea lui ω între U și V să determine ecuația asimptotei către care tinde locul de transfer cand $\omega \rightarrow 0$

a) Dacă $q = 0$ atunci $H(j\omega) = K \cdot c_0 > 0$ și

$$H(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega) \Rightarrow U(\omega) = K \cdot c_0; \quad V(\omega) = 0,$$

asimptota este o dreapta paralelă cu axa imaginară ;

b) Dacă $q = 1$ atunci

$$H(j\omega) = K \cdot c_1 - j \cdot \frac{c_0}{\omega} = U(\omega) + jV(\omega) \Rightarrow U(\omega) = K \cdot c_1; \quad V(\omega) = -\frac{c_0}{\omega}$$

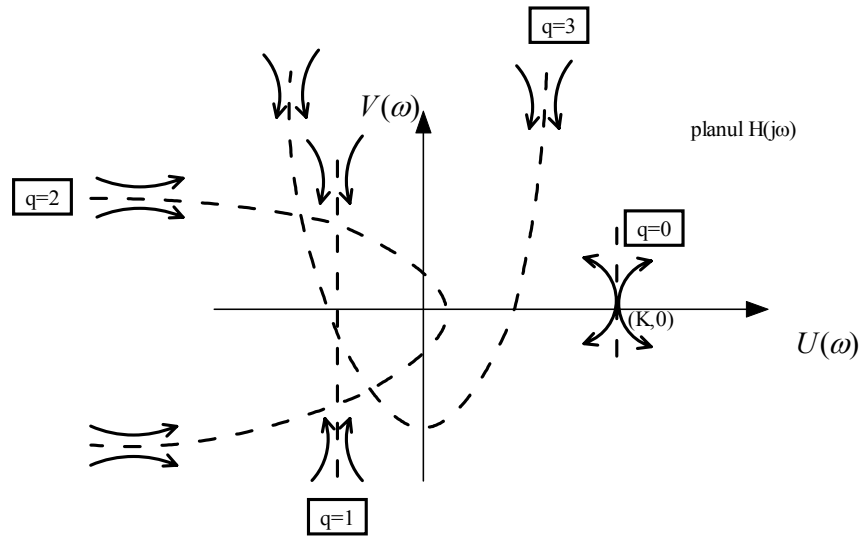
asimptota este o dreaptă

c) Dacă $q = 2$ atunci

$$H(j\omega) = K \left[-\frac{c_0}{\omega^2} - j \frac{c_1}{\omega} + c_2 \right] = U(\omega) + jV(\omega) \Rightarrow U(\omega) = K \cdot \left[c_2 - \frac{c_0}{\omega^2} \right]; \quad V(\omega) = -\frac{c_1}{\omega}$$

asimptota este o parabolă $\Rightarrow U = K \left[c_2 - \frac{c_0}{c_1^2} V^2 \right]$

Dacă $q \geq 1$ atunci $H(s)$ are q poli în $s=0$, iar hodograful are asimptotă de joasă frecvență, ca în figura alăturată, observându-se o rotire de $\frac{\pi}{2}$, în sensul acelor de ceasornic, la creșterea lui q .

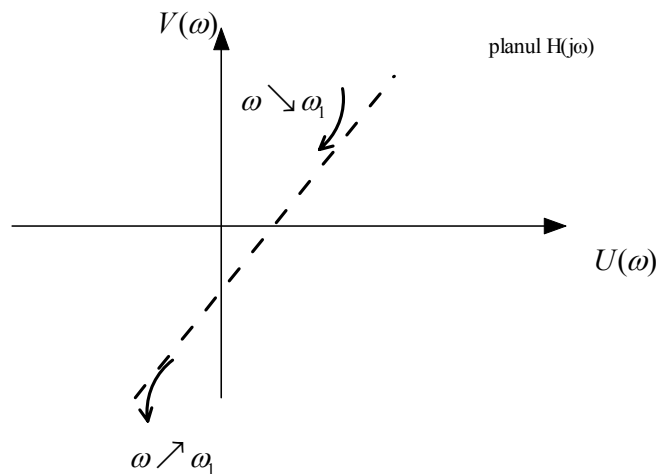


• **Comportarea când $\omega \rightarrow \omega_1$**

Hodograful se va comporta după o asimptotă oblică :

$$V = mU + n$$

unde $m = \lim_{\omega \rightarrow \omega_1} \frac{V(\omega)}{U(\omega)}$ și $n = \lim_{\omega \rightarrow \omega_1} (V(\omega) - mU(\omega))$



• **Comportarea în înaltă frecvență ($\omega \rightarrow \infty$)**

Fie
$$H(s) = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0}$$

Pentru $\omega \rightarrow \infty$

$$H(j\omega)\Big|_{\omega \rightarrow \infty} = \frac{b_m (j\omega)^m + \dots + b_1 (j\omega) + b_0}{a_n (j\omega)^n + \dots + a_1 (j\omega) + a_0}\Big|_{\omega \rightarrow \infty} \cong \frac{b_m / a_n}{(j\omega)^e}\Big|_{\omega \rightarrow \infty}$$

unde $e=n-m$ excesul polilor față de zerouri

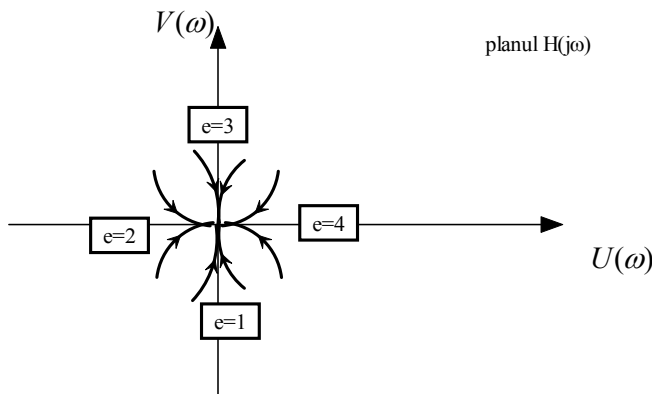
Se pune problema unghiului sub care locul de transfer ajunge în origine.

Comportarea în jurul originii este dată de relația:

$$H_\infty(j\omega) = H(\omega) e^{j\varphi(\omega)} = \frac{b_m / a_n}{\omega^e} e^{j\left(-\frac{\pi}{2}\right)}$$

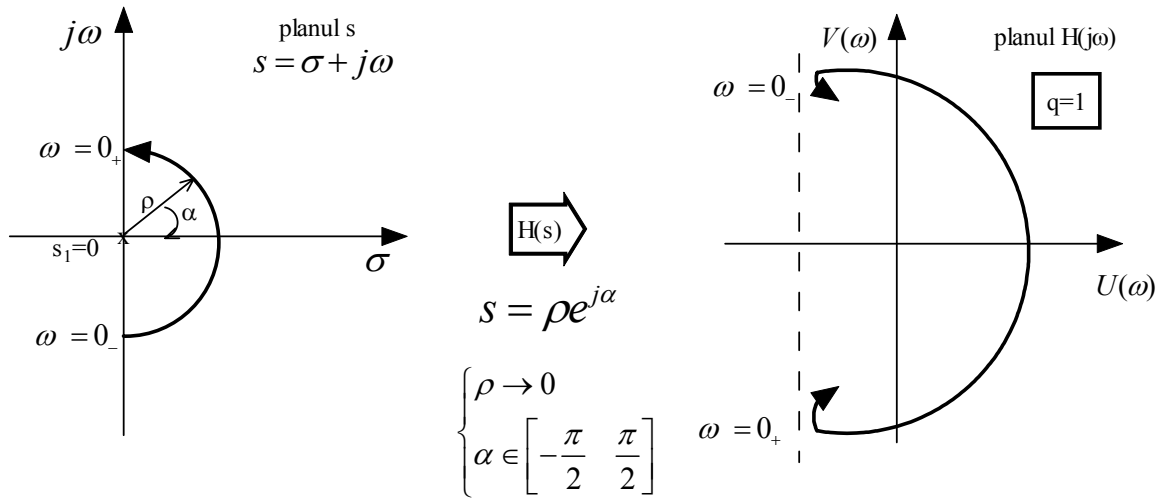
În consecință în înaltă frecvență modulul tinde la zero ($H(\omega) \rightarrow 0$ cu $\omega \rightarrow \infty$) și hodograful tinde în originea planului (U,V) iar faza tinde la :

$$\varphi(\omega)\Big|_{\omega \rightarrow \infty} = \begin{cases} -e \frac{\pi}{2} & b_m / a_n > 0 \\ -e \frac{\pi}{2} - \pi & b_m / a_n < 0 \end{cases}$$



Obs : Când $b_m / a_n < 0$ figura anterioară se simetrizează față de origine.

- Transformarea conturului din jurul originii



$$H(\rho e^{j\alpha}) \Big|_{\rho \rightarrow 0} = \left(\frac{K}{(\rho e^{j\alpha})^q} \cdot \frac{(1 + b_1(\rho e^{j\alpha}) + \dots + b_m(\rho e^{j\alpha})^m)}{(1 + a_1(\rho e^{j\alpha}) + \dots + a_n(\rho e^{j\alpha})^n)} \right) \Big|_{\rho \rightarrow 0}$$

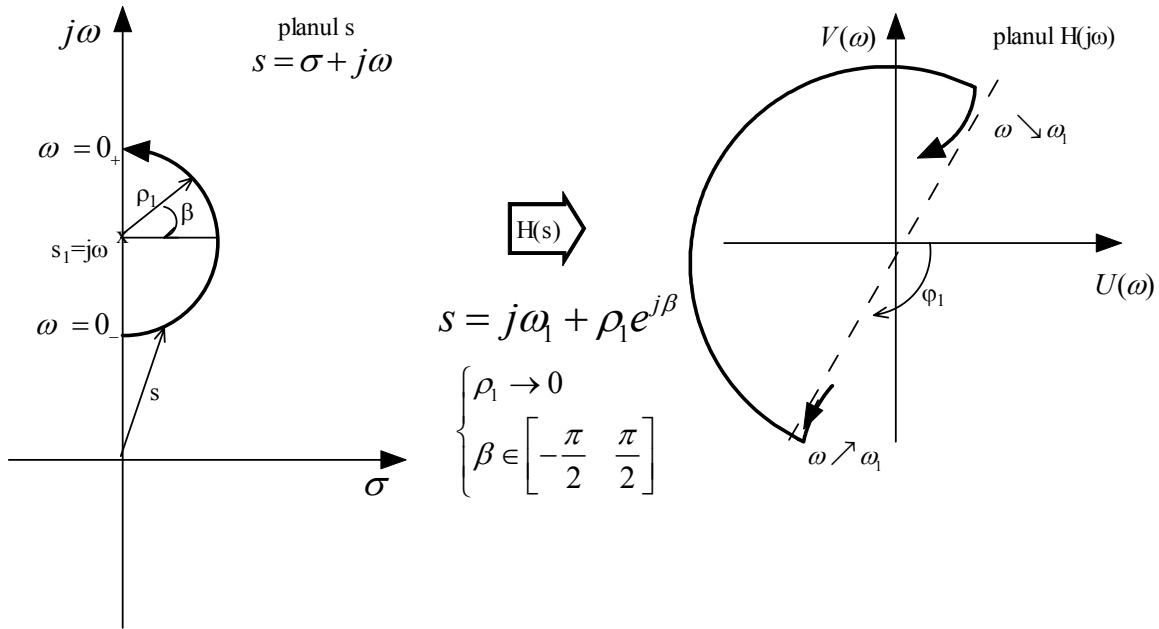
$$\cong \frac{K}{(\rho e^{j\alpha})^q} \Big|_{\rho \rightarrow 0} = M e^{j\varphi}$$

$$M = \frac{K}{(\rho)^q} \Big|_{\rho \rightarrow 0} \rightarrow \infty$$

$$\varphi = -q\alpha \in \left[q\frac{\pi}{2}, -q\frac{\pi}{2} \right] \Rightarrow \Delta\varphi = -q\pi$$

Concluzie : Conturul din jurul originii se transformă într-un contur de rază ∞ mare pe care variația de argument este $-q\pi$.

- Transformarea conturului din jurul unui pol imaginar $s_1 = j\omega_1$



Dacă există un pol imaginar, există și conjugatul lui ($s_2 = -j\omega_1$)

$$H(s) = \frac{K}{s^q} \cdot \frac{r(s)}{p(s)} = \frac{K}{s^q} \cdot \frac{r(s)}{(s - j\omega_1) \cdot (s + j\omega_1) \cdot \tilde{p}(s)} = \frac{1}{(s^2 + \omega_1^2)} H_1(s)$$

$$H(j\omega_1 + \rho_1 e^{j\beta}) \Big|_{\rho_1 \rightarrow 0} = \left(\frac{H_1(j\omega_1 + \rho_1 e^{j\beta})}{(j\omega_1)^2 + 2j\omega_1 \rho_1 e^{j\beta} + (\rho_1 e^{j\beta})^2 + \omega_1^2} \right) \Big|_{\rho_1 \rightarrow 0} =$$

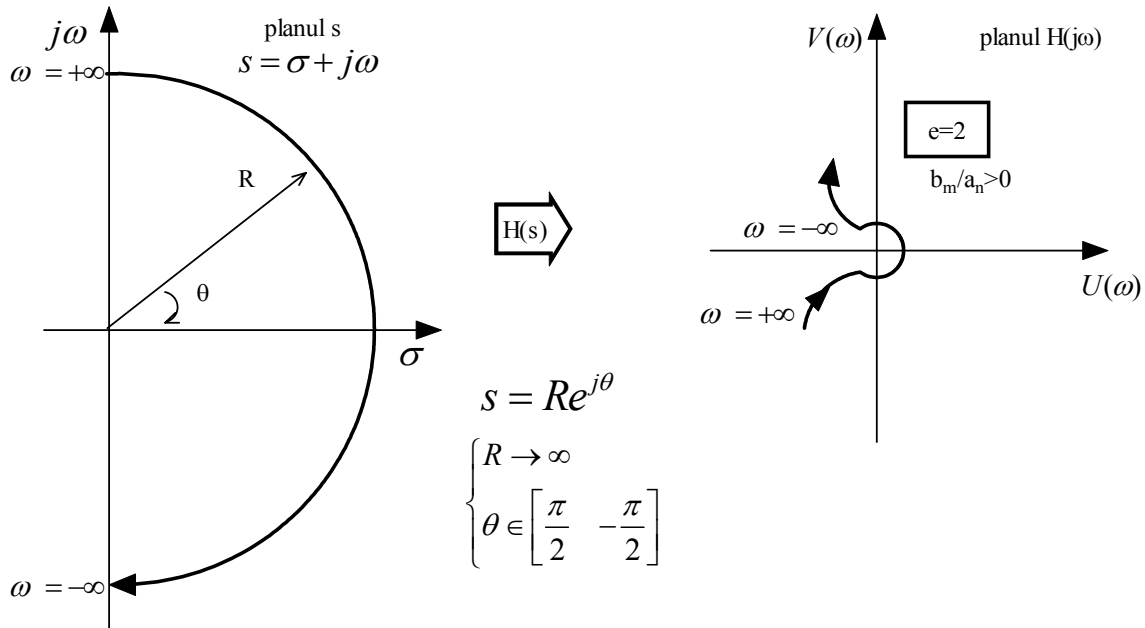
$$\cong \frac{H_1(j\omega_1)}{2j\omega_1 \rho_1 e^{j\beta}} \Big|_{\rho_1 \rightarrow 0} = N e^{j\psi}$$

$$N = \frac{|H_1(j\omega_1)|}{2\omega_1 \rho_1} \Big|_{\rho_1 \rightarrow 0} \rightarrow \infty$$

$$\psi = \varphi_1 - \frac{\pi}{2} - \beta \in [\varphi_1 \quad \varphi_1 - \pi] \Rightarrow \Delta\psi = -\pi$$

Concluzie : Conturul din jurul unui pol imaginar se transformă într-un contur de rază ∞ mare pe care variația de argument este $-\pi$.

- Transformarea conturului de la ∞



$$H(Re^{j\theta}) \Big|_{R \rightarrow \infty} = \left(\frac{(1 + b_1(Re^{j\theta}) + \dots + b_m(Re^{j\theta})^m)}{(1 + a_1(Re^{j\theta}) + \dots + a_n(Re^{j\theta})^n)} \right) \Big|_{R \rightarrow \infty}$$

$$\cong \frac{b_m / a_n}{(R^e e^{je\theta})} \Big|_{R \rightarrow \infty} = Ae^{j\delta}$$

$$A = \frac{|b_m / a_n|}{R^e} \Big|_{R \rightarrow \infty} \rightarrow 0$$

$$\delta = -e\theta + \arg(b_m / a_n) \in \left[-e\frac{\pi}{2} + \arg(b_m / a_n), e\frac{\pi}{2} + \arg(b_m / a_n) \right] \Rightarrow \Delta\delta = e\pi$$

Concluzie : Conturul de la ∞ se transformă într-un contur de rază ∞ mică în jurul originii pe care variația de argument este $e\pi$.

Algoritmul de trasare calitativă a hodografului

Date: Funcția de transfer

Pasul 1.

Se calculează:

- polii și zerourile lui $H(s)$,
- factorul de amplificare k
- tipul funcției de transfer q
- excesul polilor față de zerouri e

Se trasează conturul lui Nyquist

Pasul 2.

Se calculează $H(j\omega)$ și respectiv $U(\omega)$ și $V(\omega)$

Pasul 3.

Se studiază comportarea la joasă și la înaltă frecvență și dacă este cazul în jurul polilor imaginari

ω	0		ω_1		∞
$U(\omega)$	K	$\pm\infty$	$\pm\infty$		± 0
$V(\omega)$	0	$\pm\infty$	$\pm\infty$		± 0
	$\pm\infty$				

Pasul 4.

Se trasează hodograful și se simetrizează față de axa reală.

5.2. Trasarea caracteristicilor semilogaritmice de frecvență

- Se aduce $H(s)$ sub forma termenilor tip și se face transformarea $s = j\omega$.

$$H(s) = \frac{K}{s^q} \cdot \frac{\prod_{i=1}^p (T_i s + 1) \prod_{j=1}^l (T_j^2 s^2 + 2\zeta_j T_j s + 1)}{\prod_{k=1}^r (T_k s + 1) \prod_{l=1}^n (T_l^2 s^2 + 2\zeta_l T_l s + 1)}$$

- Trasarea efectivă a celor două caracteristici se poate efectua:
 - exact, prin puncte, dându-se valori lui ω și calculându-se efectiv modulul și faza funcției de transfer;
 - se trasează mai întâi caracteristica asimptotică (aproximativă sau liniarizată) după care cea exactă, evaluând erorile de aproximare, în special, în dreptul pulsațiilor de frângere.

Trasarea caracteristicii aproximative se poate efectua trasându-se caracteristicile fiecărui termen în parte, după care caracteristica finală se obține prin însumarea caracteristicilor parțiale ale elementelor tip.

Pentru **caracteristica amplitudine - pulsație** există posibilitatea de trasare cu următoarea etapizare :

-Se calculează $K_{dB} = 20 \lg K$;

-Se calculează pulsațiile de frângere (inversul constantelor de timp $\frac{1}{T_k}$) și se

dispun pe axa ω . Pentru elementele de ordinul doi se identifică și factorii de amortizare (ζ)

-Se fixează punctul de coordonate $(\omega = 1, K_{dB})$ prin care va trece asimptota de joasă frecvență.

Se trasează asimptota de joasă frecvență care va trece prin punctul mai sus menționat și având o pantă de $-20q$ dB/dec.

Panta asimptotei de joasă frecvență se va modifica în dreptul primei pulsații de frângere cu ± 20 dB/dec dacă această pulsație este dată de un termen de ordinul 1 sau cu ± 40 dB/dec dacă este de ordinul 2, semnul plus fiind pentru termenii de anticipare (de la numărător) și semnul minus pentru termenii de întârziere (de la numitor). Modificări ale pantei caracteristicii vor apărea în dreptul tuturor pulsațiilor de frângere.

Caracteristicile logaritmice ale elementelor standard

1. elementul constant

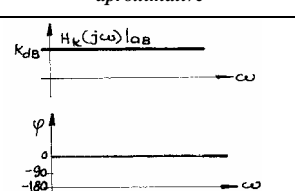
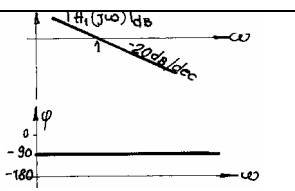
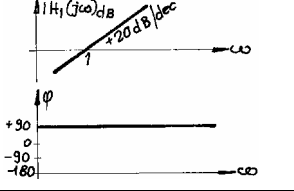
$$H_K(s) = K \Rightarrow H_K(j\omega) = K \Rightarrow \begin{cases} H_K(\omega)|_{dB} = 20 \lg K \\ \varphi_K(\omega) = 0 \end{cases}$$

2. elementul integrator

$$H_I(s) = \frac{1}{s} \Rightarrow H_I(j\omega) = \frac{1}{j\omega} = \frac{1}{\omega} e^{-j\frac{\pi}{2}} \Rightarrow \begin{cases} H_I(\omega)|_{dB} = 20 \lg \frac{1}{\omega} = -20 \lg \omega \\ \varphi_I(\omega) = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

3. elementul derivativ

$$H_D(s) = s \Rightarrow H_D(j\omega) = j\omega = \omega e^{j\frac{\pi}{2}} \Rightarrow \begin{cases} H_D(\omega)|_{dB} = 20 \lg \omega = -H_I(\omega)|_{dB} \\ \varphi_D(\omega) = \frac{\pi}{2} = -\varphi_I(\omega) \end{cases}$$

nr crt	Denumirea termenului tip Funcția de transfer	Caracteristici semilogaritmice aproximative
1	Element constant: $H_k(j\omega) = k$	
2	Element integrator : $H_{I_i}(j\omega) = \frac{1}{j\omega}$;	
3	Element derivativ : $H_{I_d}(j\omega) = j\omega$	

4. elementul de anticipare (cu avans de fază) de ordinul 1

$$H_{LA}(s) = Ts + 1 \Rightarrow H_{LA}(j\omega) = j\omega T + 1 \Rightarrow \begin{cases} H_{LA}(\omega)|_{dB} = 20 \lg \sqrt{\omega^2 T^2 + 1} \\ \varphi_{LA}(\omega) = \arctg(\omega T) \end{cases}$$

Trasarea se face în jurul pulsației de frângere ω_{t1} .

Dacă $\omega \ll \omega_{t1} = \frac{1}{T} \Rightarrow \omega T \ll 1 \Rightarrow H_{LA}(\omega)|_{dB} = 20 \lg 1 = 0$

Dacă $\omega \gg \omega_{t1} = \frac{1}{T} \Rightarrow \omega T \gg 1 \Rightarrow H_{LA}(\omega)|_{dB} = 20 \lg \sqrt{\omega^2 T^2} = 20 \lg \omega T$

Rezultă caracteristica amplitudine pulsație aproximativă de forma :

$$\tilde{H}_{LA}(\omega)|_{dB} = \begin{cases} 0 & \omega \in [0 \quad \omega_{t1}) \\ 20 \lg \omega T & \omega \in [\omega_{t1} \quad +\infty) \end{cases}$$

Eroarea făcută de această aproximare este maximă în ω_{t1} :

$$\varepsilon(\omega_{t1})|_{dB} = H_{LA}(\omega_{t1})|_{dB} - \tilde{H}_{LA}(\omega_{t1})|_{dB} = 20 \lg \sqrt{\omega_{t1}^2 T^2 + 1} - 20 \lg \omega_{t1} T = 20 \lg \sqrt{2} = 3dB$$

Caracteristica fază pulsație se trasează pe baza următorului calcul :

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \varphi_{LA}(\omega) = 0 \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \varphi_{LA}(\omega) = \frac{\pi}{2} \quad \varphi_{LA}(\omega_{t1}) = \frac{\pi}{4}$$

5. elementul de întârziere de ordinul 1

$$H_{LI}(s) = \frac{1}{Ts + 1} \Rightarrow H_{LI}(j\omega) = \frac{1}{j\omega T + 1} = \frac{1 - j\omega T}{1 + \omega^2 T^2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} H_{LI}(\omega)|_{dB} = -20 \lg \sqrt{\omega^2 T^2 + 1} = -H_{LA}(\omega)|_{dB} \\ \varphi_{LI}(\omega) = -\arctg(\omega T) = -\varphi_{LA}(\omega) \end{cases}$$

nr crt	Denumirea termenului tip Funcția de transfer	Caracteristici semilogaritmice aproximative
4	Element de anticipare de ordinul 1: $H_{L_i}(j\omega) = j\omega T + 1$	
5	Element de întârziere de ordinul 1: $H_{L_i}(j\omega) = \frac{1}{j\omega T + 1}$;	

6. elementul de anticipare (cu avans de fază) de ordinul 2

$$H_{QA}(s) = T^2 s^2 + 2\zeta Ts + 1 \quad T > 0; \zeta \in (0 \ 1)$$

$$\Rightarrow H_{QA}(j\omega) = j^2 \omega^2 T^2 + 2\zeta Tj\omega + 1 = 1 - \omega^2 T^2 + j 2\zeta T\omega$$

$$\Rightarrow \begin{cases} H_{QA}(\omega)|_{dB} = 20 \lg \sqrt{(1 - \omega^2 T^2)^2 + (2\zeta T\omega)^2} \\ \varphi_{QA}(\omega) = \begin{cases} \arctg \left(\frac{2\zeta\omega T}{1 - \omega^2 T^2} \right) & \omega \in [0 \ \omega_{t1}) \\ \pi - \arctg \left(\frac{2\zeta\omega T}{1 - \omega^2 T^2} \right) & \omega \in [\omega_{t1} \ +\infty) \end{cases} \end{cases}$$

Trasarea se face în jurul pulsației de frângere ω_{t1} .

$$\text{Dacă } \omega \ll \omega_{t1} = \frac{1}{T} \Rightarrow \omega T \ll 1 \Rightarrow H_{QA}(\omega)|_{dB} = 20 \lg 1 = 0$$

$$\text{Dacă } \omega \gg \omega_{t1} = \frac{1}{T} \Rightarrow \omega T \gg 1 \Rightarrow H_{LA}(\omega)|_{dB} = 20 \lg \sqrt{(\omega^2 T^2)^2} = 40 \lg \omega T$$

Rezultă caracteristica amplitudine pulsație aproximativă de forma :

$$\tilde{H}_{LA}(\omega)|_{dB} = \begin{cases} 0 & \omega \in [0 \ \omega_{t1}) \\ 40 \lg \omega T & \omega \in [\omega_{t1} \ +\infty) \end{cases}$$

Eroarea făcută de această aproximare este maximă în ω_{t1} :

$$\varepsilon(\omega_{t1})|_{dB} = H_{LA}(\omega_{t1})|_{dB} - \tilde{H}_{LA}(\omega_{t1})|_{dB} = 20 \lg \sqrt{(1 - \omega_{t1}^2 T^2)^2 + (2\zeta T\omega_{t1})^2} - 40 \lg \omega_{t1} T = 20 \lg \sqrt{4\zeta^2}$$

$$\varepsilon(\omega_{t1})|_{dB} = 20 \lg(2\zeta) = \begin{cases} -\infty & \zeta = 0 \\ < 0 & \zeta \in (0 \ 0.5) \\ 0 & \zeta = 0.5 \\ > 0 & \zeta > 0.5 \end{cases}$$

Caracteristica fază pulsație se trasează pe baza următorului calcul :

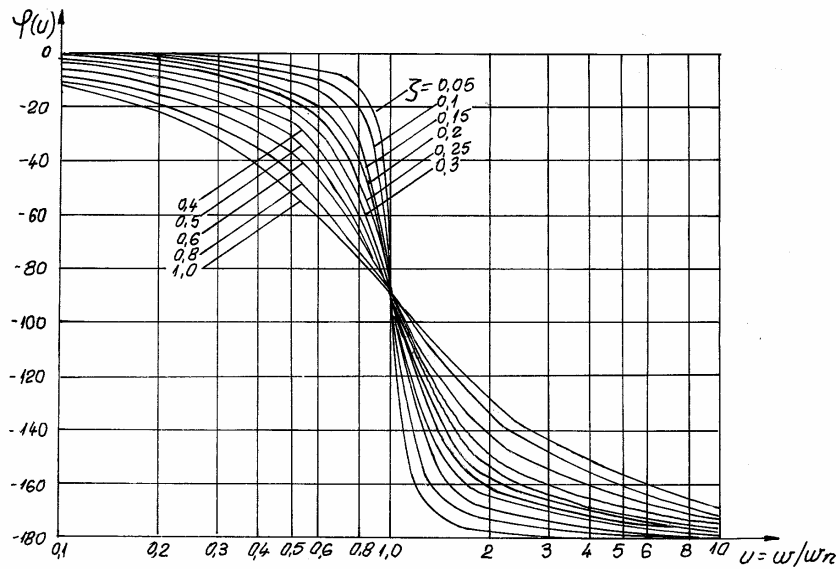
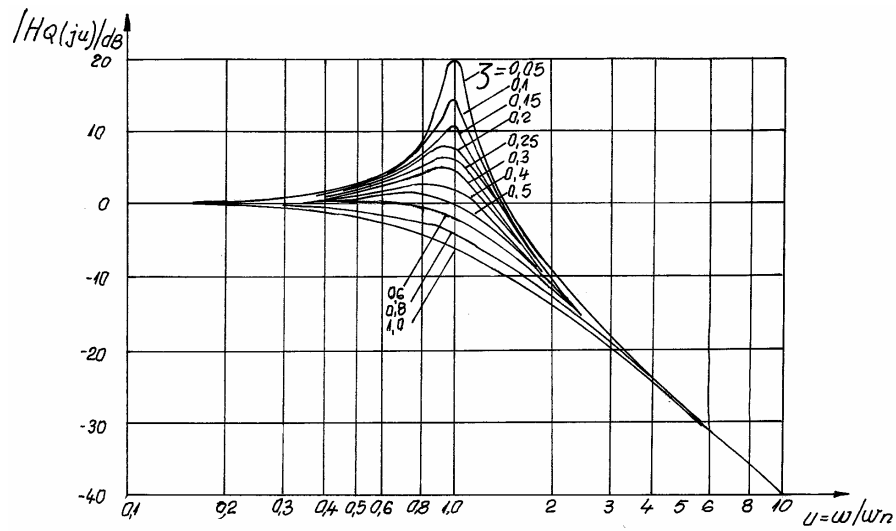
$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \varphi_{QA}(\omega) = 0 \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \varphi_{QA}(\omega) = \pi \quad \varphi_{QA}(\omega_{t1}) = \pi - \arctg \frac{2\zeta}{0} = \frac{\pi}{2}$$

7. elementul de întârziere de ordinul 2

$$H_{QI}(s) = \frac{1}{T^2 s^2 + 2\zeta Ts + 1} \quad T > 0; \zeta \in (0 \ 1)$$

$$\Rightarrow H_{QI}(j\omega) = \frac{1}{1 - \omega^2 T^2 + j 2\zeta T\omega}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} H_{QI}(\omega)|_{dB} = -20 \lg \sqrt{(1 - \omega^2 T^2)^2 + (2\zeta T\omega)^2} = -H_{QA}(\omega)|_{dB} \\ \varphi_{QI}(\omega) = -\varphi_{QA}(\omega) = \begin{cases} -\arctg \left(\frac{2\zeta\omega T}{1 - \omega^2 T^2} \right) & \omega \in [0 \ \omega_{t1}) \\ -\pi + \arctg \left(\frac{2\zeta\omega T}{1 - \omega^2 T^2} \right) & \omega \in [\omega_{t1} \ +\infty) \end{cases} \end{cases}$$



Caracteristicile de frecvență semilogaritmice exacte pentru un element de întârziere de ordinul 2