4. Analiza în timp a sistemelor liniare continue şi invariante

Analiza în timp reprezintă determinarea răspunsului în timp a sistemelor considerate, la diverse tipuri de semnale de intrare şi determinarea principalelor proprietăţi (stabilitate, performanţe de regim tranzitoriu şi staţionar, etc.).

4.1. Răspunsul în timp. Componenta liberă şi forţată a răspunsului unui sistem

Fie un sistem dinamic de ordinul *n*, descris de ecuaţiile de stare :

$$\begin{cases} \dfrac{d\,\bar{x}(t)}{dt} = A\cdot\bar{x}(t) + bu(t),\ \ x(0)=x_0 \\ y(t) = c^T\cdot\bar{x}(t) \end{cases}$$

unde

$$\bar{x}(t) = \left[x_1(t) \quad x_2(t) \quad \ldots \quad x_n(t)\right]^T;$$
$$x(t)\in\mathbb{R}^n;\ y(t)\in\mathbb{R};\ u(t)\in\mathbb{R};\ t\in\mathbb{R}$$
$$A\in\mathbb{R}^{n\times n};\ b\in\mathbb{R}^{n\times 1};\ c^T\in\mathbb{R}^{1\times n}$$

iar $u(t):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continuă

Condiţia iniţială $x_0 = x(0)$ concentrează istoria sistemului până la $t_0 = 0$ şi interesează evoluţia sistemului pentru t > 0.
Traiectoria de stare, la un moment $t \ge t_0$ este :

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}\cdot x(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}bu(\tau)d\tau$$

Dacă $t_0 = 0$ şi $x_0 = x(t_0)\big|_{t_0=0} = x(0)$ atunci: $x(t) = e^{At}\cdot x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}bu(\tau)d\tau$

iar $\Phi(t) = e^{At}$, $t\in\mathbb{R}$ defineşte ***matricea de tranziţie*** a stărilor sau ***matricea fundamentală*** a sistemului.

$$y(t) = c^T\cdot\bar{x}(t) = \underbrace{c^T\cdot e^{At}\cdot x_0}_{y_l(t)} + \underbrace{\int_0^t c^T\cdot e^{A(t-\tau)}bu(\tau)d\tau}_{y_f(t)}$$

y_l – componenta liberă a raspunsului (depinde de condiţiile iniţiale şi matricea A)
y_f – componenta forţată a raspunsului (depinde de mărimea de comandă/ mărimea de intrare şi realizarea sistemului (A,b,c^T))

Dacă se pleacă de la ecuațiile de stare cărora li se aplică transformata Laplace obținem :

$$s \cdot X(s) - x_0 = A \cdot X(s) + b \cdot U(s)$$
$$\Rightarrow \left(sI_n - A\right) \cdot X(s) = x_0 + b \cdot U(s)\Big|_{\left(sI_n - A\right)^{-1}}$$
$$X(s) = \left(sI_n - A\right)^{-1} \cdot x_0 + \left(sI_n - A\right)^{-1} \cdot b \cdot U(s)$$

$$Y(s) = c^T \cdot X(s)$$
$$\Rightarrow Y(s) = c^T \cdot \left(sI_n - A\right)^{-1} \cdot x_0 + \underbrace{c^T \cdot \left(sI_n - A\right)^{-1} \cdot b}_{H(s)} \cdot U(s)$$

$$Y(s) = c^T \cdot \left(sI_n - A\right)^{-1} \cdot x_0 + H(s) \cdot U(s)$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{Y(s)\right\}$$
$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{c^T \cdot \left(sI_n - A\right)^{-1} \cdot x_0\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{H(s) \cdot U(s)\right\}$$
$$y(t) = \underbrace{c^T \cdot e^{At} \cdot x_0}_{y_l(t)} + \underbrace{\left(h \otimes u\right)(t)}_{y_f(t)}$$

unde $h(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{H(s)\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{c^T \cdot \left(sI_n - A\right)^{-1} \cdot b\right\} = c^T \cdot e^{At} \cdot b$ este funcția pondere (răspunsul sistemului la impuls)

Dacă condițiile inițiale sunt nule $\left(x_0 = 0\right)$ atunci :

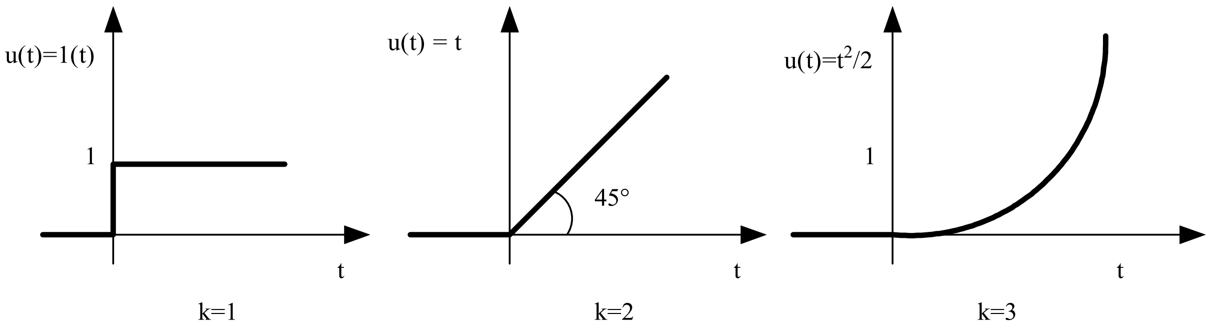
$$y_l(t) = 0$$

$$y(t) = y_f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{H(s) \cdot U(s)\right\} = \left(h \otimes u\right)(t) = \int_0^t c^T \cdot e^{A(t-\tau)} b u(\tau) d\tau$$

4. 2. Mărimi de intrare standard în timp continuu

- intrări polinomiale

$$u(t) = 1(t) \cdot \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \quad \xrightarrow{\mathcal{L}} \quad U(s) = \frac{1}{s^k}, k \geq 1$$



- intrări armonice

$$u(t) = 1(t) \cdot e^{j\omega t} = 1(t) \cdot (\cos \omega t + j \sin \omega t) \quad \xrightarrow{\mathcal{L}} \quad U(s) = \frac{1}{s - j\omega}, \omega \geq 0$$

$$u(t) = 1(t) \cdot \cos \omega t \quad \xrightarrow{\mathcal{L}} \quad U(s) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}, \omega \geq 0$$

$$u(t) = 1(t) \cdot \sin \omega t \quad \xrightarrow{\mathcal{L}} \quad U(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}, \omega \geq 0$$

4.3. Răspunsul unui sitem la intrare polinomială

$$Y(s) = H(s) \cdot U(s) \quad \text{cu} \quad H(s) = \frac{Z(s)}{P(s)} \quad \text{forma ireductibilă}$$

$$u(t) = 1(t) \cdot \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \quad \xrightarrow{\pounds} \quad U(s) = \frac{1}{s^k}, k \geq 1$$

$$Y(s) = \frac{Z(s)}{s^k P(s)} = \frac{Z(s)}{s^k \prod_{1}^{n}(s - p_i)} = \frac{c_0}{s^k} + \ldots \frac{c_{k-1}}{s} + \frac{a_1}{s - p_1} + \ldots + \frac{a_n}{s - p_n}$$

unde k este tipul functiei de transfer sau numarul polilor in origine iar n este numarul polilor diferiti de zero.

$$c_j = \frac{1}{j!} \cdot H^{(j)}(0) = \frac{1}{j!} \cdot \left. \frac{d^j H(s)}{ds^j} \right|_{s=0}, \quad j = 1..k-1 \quad \text{şi} \; a_i = \frac{Z(p_i)}{p_i^k P'(p_i)}, \quad i = 1..n$$

$$\Rightarrow \boxed{y(t) = \underbrace{\sum_{j=1}^{k} c_{k-1} \frac{t^{k-j}}{(k-j)!}}_{\text{componenta permanenta}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} a_i e^{p_i t}}_{\text{componenta tranzitorie}}} \quad \text{în condiții inițiale nule}$$

Dacă se consideră o intrare treaptă unitară: $u(t) = 1(t) \quad \xrightarrow{\pounds} \quad U(s) = \frac{1}{s}$

$$\Rightarrow \quad y(t) = \underbrace{H(0) \cdot 1(t)}_{\text{componenta permanenta}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} a_i e^{p_i t} 1(t)}_{\text{componenta tranzitorie}}$$

dacă şi numai dacă sistemul este strict stabil, adică $\mathrm{P}[\mathrm{H(s)}] \subset \mathrm{C}^-$ şi deci $\mathrm{Re}(\mathrm{p_i}) < 0$.

Se observă că dacă $t \rightarrow \infty$ atunci $\mathrm{y(t)} = \mathrm{H}(0) \cdot 1(\mathrm{t}) = \mathrm{y_p(t)}$

În consecință, răspunsul sistemului, mai precis componenta lui forțată (***y**$_f$*), este constituit din doi termeni ce vor fi definiți prin:

$$y(t) = y_f(t) = y_p(t) + y_t(t); \;\; x_0 = 0; \;\; y_l = 0$$

y_p - componenta permanentă a răspunsului;
y_t - componenta tranzitorie a răspunsului.
y_l - componenta liberă a răspunsului.

OBSERVAȚII :

1. Descompunerea $y(t) = y_l(t) + y_f(t)$ este o descompunere generală ce se obține în orice condiții. Descompunerea $y(t) = y_p(t) + y_t(t)$ nu este generală; ea se obține dacă sistemul este strict stabil şi intrarea este dată, cu x(0)=0 ($y_l = 0$).

2. În cazul particular al unui semnal treaptă pe intrare, răspunsul sistemului se mai numeşte ***răspuns indicial***.

3. Se observă la semnal treaptă pe intrare că dacă $t \rightarrow \infty$ atunci $y(t) = H(0) \cdot 1(t) = y_p(t) = const$

Această mărime constantă defineşte regimul staționar.

Regimul staționar este un caz particular de regim permanent şi anume pentru intrare treaptă iar H(0) defineşte factorul de amplificare al sistemului.

4.4. Răspunsul unui sitem la intrare armonică

$$u(t) = 1(t)\cdot e^{j\omega t} = 1(t)\cdot(\cos\omega t + j\sin\omega t) \xrightarrow{\mathcal{L}} U(s) = \frac{1}{s - j\omega}, \omega \geq 0$$

$$Y(s) = H(s)\cdot U(s) \text{ cu } H(s) = \frac{Z(s)}{P(s)} \quad \text{ireductibilă}$$

$$Y(s) = \frac{Z(s)}{(s - j\omega)P(s)} = \frac{Z(s)}{(s - j\omega)\prod_{1}^{n}(s - p_i)} = \frac{a_0}{s - j\omega} + \frac{a_1}{s - p_1} + \ldots + \frac{a_n}{s - p_n}$$

$$a_0 = \frac{Z(j\omega)}{P(j\omega)} = H(j\omega)$$

$$a_i = \frac{Z(pi)}{(p_i - j\omega)P'(p_i)}; i = 1\ldots n$$

unde H(jω) este transformata Fourier a funcției de transfer a sistemului

Deci: $y(t) = H(j\omega)e^{j\omega t} + \sum_{i=1}^{n} a_i e^{p_i t} = y_p(t) + y_t(t)$

Componenta permanentă va fi:

$$y_p(t) = H(j\omega)\cdot e^{j\omega t} = \left(\left|H(j\omega)\right|\cdot e^{j\cdot\arg(H(j\omega))}\right)\cdot e^{j\omega t}$$
$$= \left(A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}\right)\cdot e^{j\omega t} = A(\omega)e^{j(\omega t + \varphi(\omega))}$$

Relația arată că, dacă la intrare, se aplică un semnal armonic de pulsație ω, la ieşire se obține un semnal de aceeaşi pulsație, defazat cu *φ(ω)* şi modificat în amplitudine cu *A(ω)*.

4.5. Analiza în timp a funcțiilor de transfer standard

- Funcția de transfer a unui sistem exprimată prin termeni tip

$$H(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{b_n s^n+\ldots+b_1 s+b_0}{s^q(a_m s^m+\ldots+a_1 s+a_0)}=\frac{b_0}{a_0}\cdot\frac{1+\sum_1^n \frac{b_i}{b_0}s^i}{s^q(1+\sum_1^m \frac{a_i}{a_0}s^j)}$$

Factorizând polinoamele de la numărător la numitor în funcție de rădăcinile simple sau complexe şi de ordinul de multiplicitate, obținem:

$$H(s)=\frac{K}{s^q}\cdot G(s)=\frac{K}{s^q}\cdot\frac{\prod_1^p (T_i s+1)\prod_1^t (T_j{}^2 s^2+T_j s+1)}{\prod_1^r (T_k s+1)\prod_1^n (T_l{}^2 s^2+T_l s+1)}$$

cu

K - factorul de amplificare al sistemului
T - constanta de timp

Se pun în evidență următorii termeni tip:

- Termen constant $H_K(s)=K$
- Termen liber : integrator $H_I(s)=\frac{1}{s}$ sau derivator $H_D(s)=s$
- Termen liniar :

- de întârziere de ordinul I $H_L(s)=\frac{1}{Ts+1}$
- de anticipare de ordinul I $H_L(s)=Ts+1$

- Termen cuadratic :

- de întârziere de ordinul II $H_Q(s)=\frac{1}{T^2s^2+2\varsigma Ts+1}$
- de anticipare de ordinul II $H_Q(s)=T^2s^2+2\varsigma Ts+1$

tipul funcției de transfer = numărul polilor în origine ai funcției de transfer.

Ordinul funcției de transfer = ordinul ecuației diferențiale din care s-a obținut prin transformata Laplace funcția de transfer. Deci pentru sisteme fizic realizabile, m>n, ordinul coincide cu gradul polinomului de la numitorul funcției de transfer.

- **Răspunsul în timp a termenilor tip**

A. Să se studieze răspunsul forțat $y_f(t)$ al **elementului proporțional, de întârziere de ordinul 1**:

$$a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_0 u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} H(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{K}{Ts+1}$$

unde $T = \frac{a_1}{a_0}$ [sec]; $T > 0$ este ***constanta de timp***, iar $K = \frac{b_0}{a_0} > 0$ este ***factorul de amplificare.***

La intrare se aplică:
a) impuls Dirac $u(t) = \delta(t)$
b) treaptă unitară $u(t) = 1(t)$

a) Dacă $u(t) = \delta(t) \Rightarrow U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\} = \mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{H(s) \cdot U(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} =$$

atunci : $= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{K}{1+Ts}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{K/T}{1/T+s}\right\} = \frac{K}{T} e^{-\frac{t}{T}}$

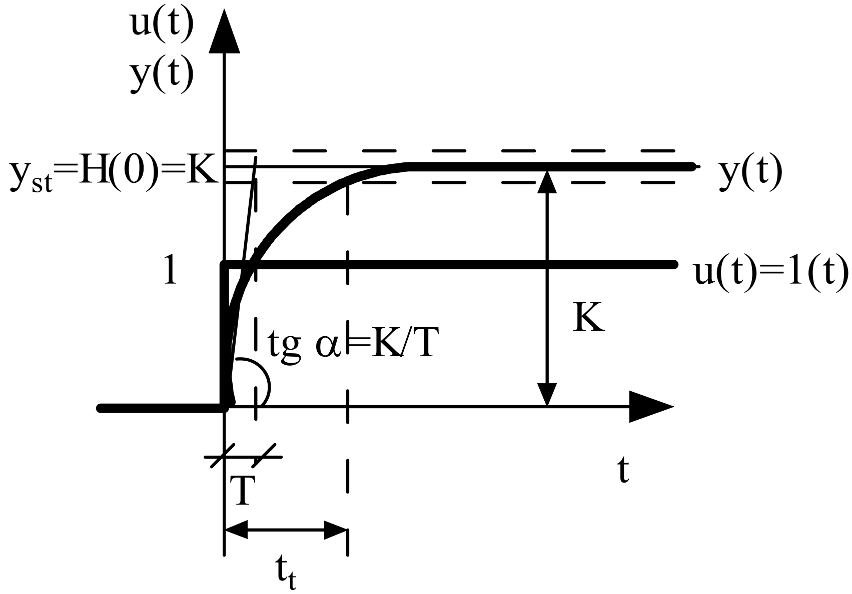
b) Dacă intrarea sistemului $u(t) = 1(t) \Rightarrow U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\} = \mathcal{L}\{1(t)\} = 1/s$

$$Y(s) = H(s)U(s) = \frac{K}{s(1+Ts)} = K\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{1/T+s}\right)$$

deci $y(t) = y_f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = K \cdot (1 - e^{-t/T})1(t)$

Componenta permanentă este $y_p(t) = H(0) = K \cdot 1(t)$

iar **componenta tranzitorie** $y_t(t) = K \cdot e^{-t/T} \cdot 1(t)$



Astfel, $y_{st} = \lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} s\cdot y(s) = K$ iar $\dfrac{dy(t)}{dt} = \dfrac{K}{T} e^{-t/T}$, $t > 0$

tangenta în origine la graficul lui y(t) este $tg\alpha = \left.\dfrac{dy(t)}{dt}\right|_{t=0} = \dfrac{K}{T}$

Intersectia dintre tangenta în origine la graficul funcției y(t) si dreapta de y_{st} determină pe axa timpului un segment egal chiar cu **constanta de timp T**. Se poate spune deja că, pe măsura ce constanta de timp creşte, răspunsul sistemului este din ce în ce mai lent.

Convențional se consideră că regimul tranzitoriu a încetat atunci când

$$\left| y(\tau) - y_{st} \right| \le k_{st} y_{st} \quad , \ \forall \tau \ge t_t$$

care defineşte **durata regimului tranzitoriu** (sau **timpul tranzitoriu**) şi unde uzual $k_{st} = 0{,}05 \quad (5[\%])$ sau $k_{st} = 0{,}02 \quad (2[\%])$.

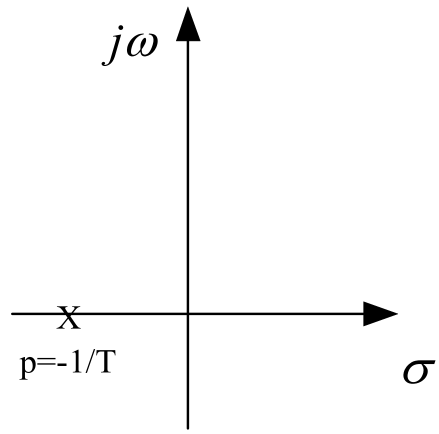
În cazul acestui sistem, devine $e^{-\tau/T} \le k_{st}$, $\forall \tau > t_t$ adică

$\tau \ge -T \ln k_{st} \Rightarrow t_t = -T \ln k_{st} \cong (3 \div 4)T$ **timpul tranzitoriu**

$\varepsilon_{st} = \lim_{t\to\infty} \varepsilon(t) = \lim_{t\to\infty} \left(u(t) - y(t)\right) = |1-K| \cdot 100 \ [\%]$ **eroarea staționară**

Trebuie reţinută şi relaţia dintre polul sistemului, ce este p = -1/T < 0 şi durata regimului tranzitoriu, care se exprima prin: $t_t \cong \dfrac{3 \div 4}{|\ p\ |}$

şi deci, pe masura ce polul se indepărtează de axa imaginară (in cadrul semiplanului stâng) regimul tranzitoriu este mai scurt.



B. Să se studieze răspunsul forţat $y_f(t)$ al **elementului proporţional, de întârziere de ordinul 2**:

$$a_2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_0 u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}}$$

$$H(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{b_0}{a_2 \cdot s^2 + a_1 \cdot s + a_0} = \frac{b_0 / a_2}{s^2 + (a_1/a_2) \cdot s + (a_0/a_2)} = \frac{b_0}{a_0} \cdot \frac{a_0/a_2}{s^2 + (a_1/a_2) \cdot s + (a_0/a_2)} =$$

$$= \frac{k\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \xrightarrow{\omega_n = 1/T} H(s) = \frac{k}{T^2 s^2 + 2\zeta T s + 1}$$

$$k = \frac{b_0}{a_0};\ \omega_n^2 = \frac{a_0}{a_2};\ 2\zeta\omega_n = \frac{a_1}{a_2}; \qquad \Rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{a_0}{a_2}};\ \zeta = \frac{1}{2}\frac{a_1}{a_2}\sqrt{\frac{a_2}{a_0}} = \frac{a_1}{2\sqrt{a_2 a_0}}$$

unde $\omega_n = \sqrt{\dfrac{a_0}{a_2}}$ $[\sec]^{-1}$ este ***pulsaţia naturală (sau proprie)***,

$T = \dfrac{1}{\omega_n}$ este ***constanta de timp*** iar $\zeta = \dfrac{a_1}{2\sqrt{a_2 a_0}}$ este ***factorul de amortizare.***

Pentru k= 1 $H(s) = \dfrac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$

ecuația caracteristică este $s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2=0$ iar polii funcției de transfer $p_{1,2}=-\zeta\cdot\omega_n\pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$

Aplicând o intrare treaptă $u(t)=1(t)\Rightarrow U(s)=\mathcal{L}\{u(t)\}=\mathcal{L}\{1(t)\}=1/s$

$$Y(s)=H(s)U(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}\cdot\frac{1}{s}=\frac{1}{s}-\frac{s+2\zeta\omega_n}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}=$$

atunci $=\frac{1}{s}-\frac{s+\zeta\omega_n}{(s+\zeta\omega_n)^2+\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\right)^2}-\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\frac{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}{(s+\zeta\omega_n)^2+\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\right)^2}$

Răspunsul indicial

$$y(t)=y_f(t)=\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}=\left(1-e^{-\zeta\omega_n t}\left(\cos\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t+\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t\right)\right)\cdot 1(t)$$

$$=\left(1-\frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\;t+arctg\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right)\right)\cdot 1(t)$$

a) Regim neamortizat $\zeta=0$ $p_{1,2}=\pm j\omega_n$

$$\mathrm{y(s)}=\frac{\omega_n^2}{s(s^2+\omega_n^2)}=\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+\omega_n^2}\quad\Rightarrow y(t)=(1-\cos\omega_n t)\;1(t)$$

b) Regim subamortizat $\zeta\in(0,\;1)$ Polii sunt complecşi $p_{1,2}=-\zeta\,\omega_n\pm j\,\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$

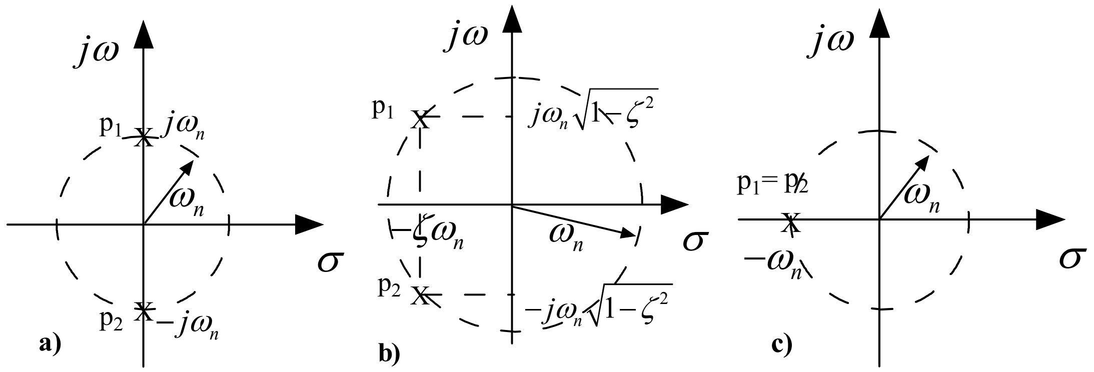
$$\Rightarrow y(t)=\left(1-e^{-\zeta\omega_n t}\left(\cos\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t+\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t\right)\right)\cdot 1(t)$$

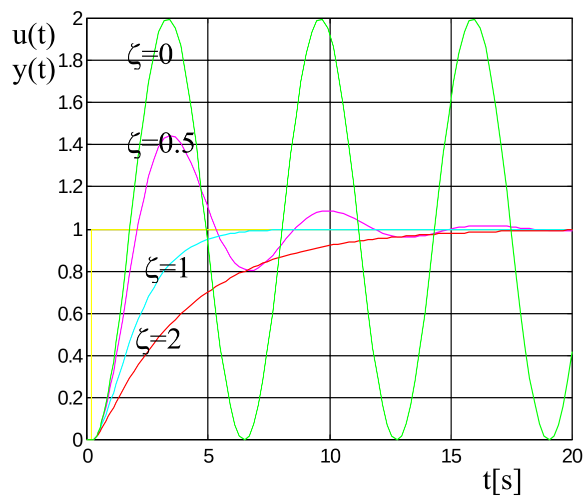
c) Regim critic $\zeta=1$ Polii sunt $p_1=p_2=-\omega_n$

$$y(s)=\frac{\omega_n^2}{s(s+\omega_n)^2}=\frac{1}{s}-\frac{s+2\omega_n}{(s+\omega_n)^2}\quad\Rightarrow\quad y(t)=\left(1-e^{-\omega_n t}(1+\omega_n t)\right)\cdot 1(t)$$

d) Regim supra amortizat $\zeta>1$**.** Polii devin reali şi distincți $p_{1,2}=-\zeta\omega_n\pm\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}$

$$y(t)=\left(1-\frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{\zeta^2-1}}sh\left(\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}\quad t+arcth\frac{\sqrt{\zeta^2-1}}{\zeta}\right)\right)\cdot 1(t)$$

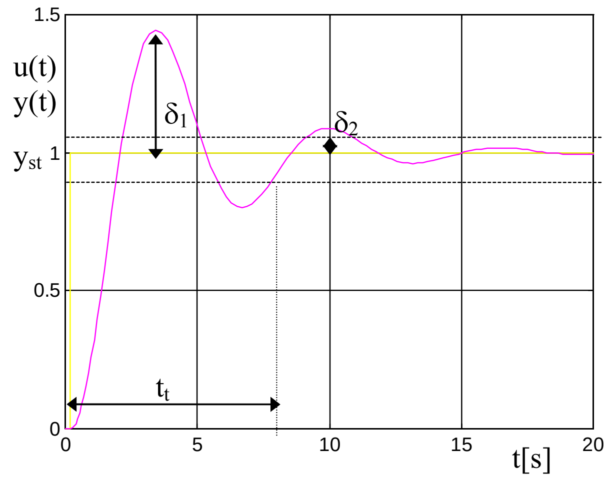




Derivata răspunsului este : $\dfrac{dy_f(t)}{dt} = \dfrac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin \omega_n \sqrt{1-\zeta^2}\, t$

şi permite calculul extremelor funcţiei $y_f(t)$ atinse la momentele de timp:

$$t_k = \frac{k\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} \qquad k = 0,1,2.....$$



valoarea răspunsului este :

$$y_f(t_k) = 1 - (-1)^k e^{-\zeta\omega_n t_k}$$

maximele locale se obţin pentru

$k = 2m+1, \quad m \in \mathcal{N}$

iar minimele locale pentru

$k = 2m, \quad m \in \mathcal{N}$

Primul maxim este : $y_{\max} = y_{st} + \delta_1 = 1 + e^{\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$

Performanţele regimului dinamic:

- *suprareglajul* $\sigma = \dfrac{y_{\max} - y_{st}}{y_{st}} = \dfrac{y_{\max}}{y_{st}} - 1 = \dfrac{\delta_1}{y_{st}} = e^{\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$
- *timpul primului maxim* sau de atingere a abaterii maxime a mărimii de ieşire in regim tranzitoriu t_σ;
- *durata regimului tranzitoriu* t_t definita prin timpul ce se scurge din momentul aplicării excitaţiei (intrarea) pe canalul de referinţa si pînă cind ieşirea intra într-o bandă de $\pm(2 \div 5)\% y_s$;

y_{st}=1 $\Rightarrow e^{-\frac{k\Pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \le k_{st}$; $\quad e^{-\zeta\omega_n t_k} \le k_{st} \Rightarrow t_k \ge \dfrac{-\ln k_{st}}{\zeta\omega_n} \qquad \Rightarrow t_t = \dfrac{3\ldots4}{\zeta\omega_n}$

t_t depinde de abscisa polilor complecşi adică tot de depărtarea de axa imaginară ca şi in cazul sistemului de ordinul I.

- *indicele de oscilație* Ψ reprezintă variația relativă a amplitudinilor a două depăşiri succesive de acelaşi semn a valorii de regim staționar,

$$\psi = \frac{\delta_1 - \delta_2}{\delta_1} = 1 - \frac{\delta_2}{\delta_1}$$

$$\delta_1 = y(t_1) - y_{st} = e^{\frac{-\Pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} , \quad \delta_2 = y(t_3) - y_{st} = e^{\frac{-3\Pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \Rightarrow \psi = 1 - e^{\frac{-2\Pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

- *perioada oscilațiilor* T pentru regimul oscilant amortizat $T = \frac{1}{\omega_n}$
- *numarul de oscilații* N dacă răspunsul traversează de un numar finit de ori componenta staționară;

Pe lângă aceşti indici de calitate principali, se mai pot defini şi alții cum ar fi:

- timpul de stabilire: momentul în care se atinge pentru prima dată valoarea staționară a iesirii;

- timpul de creştere: valoarea subtangentei dusă la y(t) la 0,5 y_{st}, tangenta fiind limitată de axa t şi de axa y_S.

Aprecierea acestor indici de calitate se face pe baza răspunsului indicial al sistemului

Performanțele regimului staționar:

- *eroarea staționară* - valoarea erorii de reglare în regim staționar (neperturbat, stabilizat)

$$\varepsilon_{st} = \lim_{t\to\infty} \varepsilon(t) = \lim_{t\to\infty} \left(u(t) - y(t) \right) = \lim_{s\to 0} s\varepsilon(s)$$