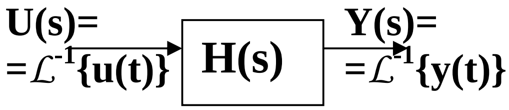
3.5. Reprezentarea in spatiul starilor pentru sisteme multivariabile. Relatia dintre functia de transfer si spatiul starilor

- functia de transfer pentru sisteme monovariabile



$$H(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}$$

- sistem de ecuații diferențiale $\Rightarrow$ ecuații de stare pentru sisteme multivariabile

$$\begin{cases}\dfrac{d\bar{x}(t)}{dt}=A\cdot\bar{x}(t)+B\bar{u}(t)+E\bar{v}(t)\\ \bar{y}(t)=C\cdot\bar{x}(t)+D\bar{u}(t)\end{cases}\quad \text{unde}\quad \begin{array}{l}\bar{x}(t)=\left[x_1(t)\quad x_2(t)\quad \ldots\quad x_n(t)\right]^T\\ \bar{u}(t)=\left[u_1(t)\quad u_2(t)\quad \ldots\quad u_m(t)\right]^T\\ \bar{y}(t)=\left[y_1(t)\quad y_2(t)\quad \ldots\quad y_k(t)\right]^T\\ \bar{v}(t)=\left[v_1(t)\quad v_2(t)\quad \ldots\quad v_l(t)\right]^T\end{array}\quad \text{şi}\quad \begin{array}{l}A\in\Re^{n\times n}\\ B\in\Re^{n\times m}\\ C\in\Re^{k\times n}\\ D\in\Re^{k\times m}\\ E\in\Re^{n\times l}\end{array}$$

Se aplica transformata Laplace sistemului în condiții inițiale nule :

$$\begin{cases}s\cdot\bar{X}(s)=A\cdot\bar{X}(s)+B\cdot\bar{U}(s)+E\cdot\bar{V}(s)\\ \bar{Y}(s)=C\cdot\bar{X}(s)+D\cdot\bar{U}(s)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\left(s\cdot I_n-A\right)\cdot\bar{X}(s)=B\cdot\bar{U}(s)+E\cdot\bar{V}(s)\\ \bar{Y}(s)=C\cdot\bar{X}(s)+D\cdot\bar{U}(s)\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\bar{X}(s)=\left(s\cdot I_n-A\right)^{-1}\cdot B\cdot\bar{U}(s)+\left(s\cdot I_n-A\right)^{-1}\cdot E\cdot\bar{V}(s)\\ \bar{Y}(s)=\left(C\cdot\left(s\cdot I_n-A\right)^{-1}\cdot B+D\right)\cdot\bar{U}(s)+\left(s\cdot I_n-A\right)^{-1}\cdot E\cdot\bar{V}(s)\end{cases}$$

$$\begin{bmatrix}Y_1(s)\\ Y_2(s)\\ \vdots\\ Y_k(s)\end{bmatrix}=\left(\underbrace{\begin{bmatrix}c_1\\ c_2\\ \vdots\\ c_k\end{bmatrix}}_{C_{k\times n}}\cdot\left(s\cdot I_n-A_{n\times n}\right)^{-1}\cdot\underbrace{\left[b_1\quad b_2\quad\cdots\quad b_m\right]}_{B_{n\times m}}+\underbrace{\left[d_1\quad d_2\quad\cdots\quad d_m\right]}_{D_{k\times m}}\right)\cdot\begin{bmatrix}U_1(s)\\ U_2(s)\\ \vdots\\ U_m(s)\end{bmatrix}+$$

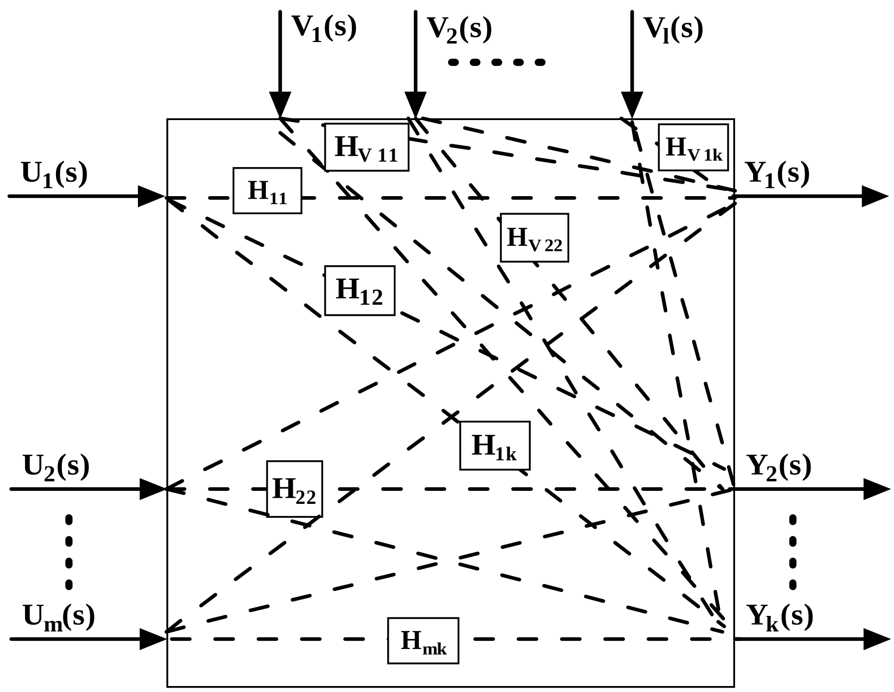
$$+\left(s\cdot I_n-A_{n\times n}\right)^{-1}\cdot\underbrace{\left[e_1\quad e_2\quad\cdots\quad e_l\right]}_{E_{n\times l}}\cdot\begin{bmatrix}V_1(s)\\ V_2(s)\\ \vdots\\ V_l(s)\end{bmatrix}$$

$$H_{ij}(s)=\frac{Y_j(s)}{U_i(s)}=c_j\cdot\left(s\cdot I_n-A_{n\times n}\right)^{-1}\cdot b_i+d_i$$

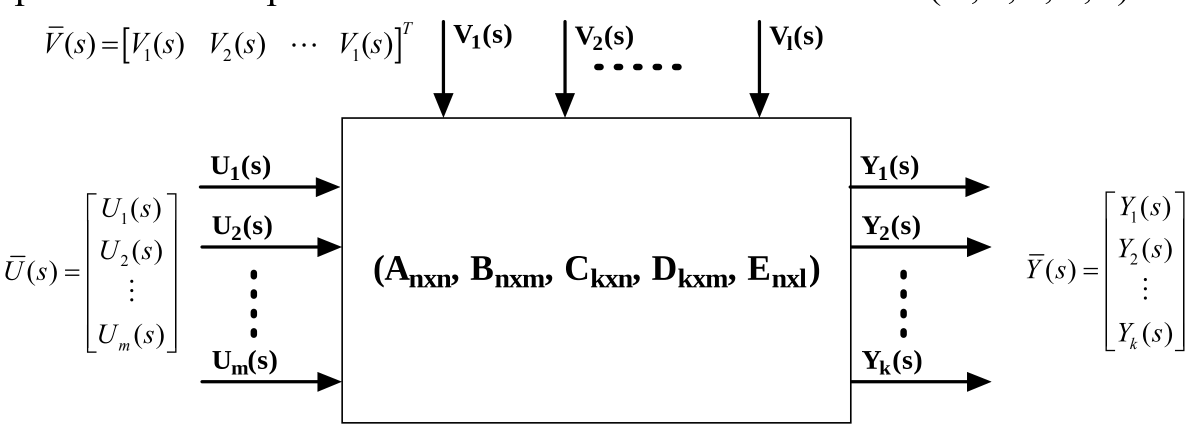
$$i=1\ldots m;\quad j=1\ldots k$$

$$H_{V\,ij}(s)=\frac{Y_j(s)}{V_i(s)}=\left(s\cdot I_n-A_{n\times n}\right)^{-1}\cdot e_i$$

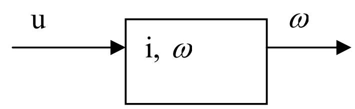
$$i=1\ldots l;\quad j=1\ldots k$$



Reprezentarea in spatiul starilor ⇒ determinarea matricilor (A,B,C,D,E)



Exemplu: motrul de curent continuu cu excitație independentă



u = tensiunea de alimentare la bornele circuitului rotoric, reprezintă <u>mărimea de intrare</u>
ω = turația axului motor, reprezintă <u>mărimea de ieşire</u>
i = intensitatea curentului rotoric
R = rezistența circuitului rotoric
L = inductanța înfăşurării rotorice
e = tensiunea contra-electromotoare
Φ = fluxul de excitație
J = momentul de inerție al axului motorului
θ = deplasarea unghiulară a axului motorului ;
C_m = cuplul activ (al motorului)
C_r = cuplul rezistiv (de sarcină)
f = coeficientul de frecare

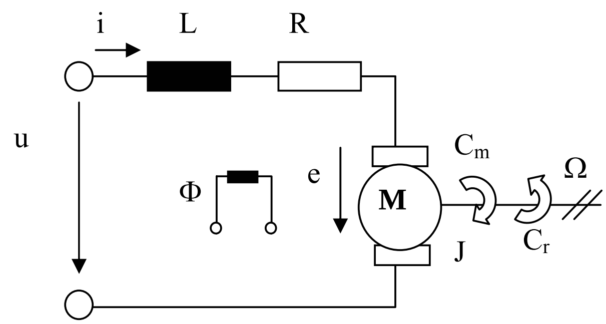


Fig.1. Schema de funcționare a unui motor de cc cu excitație independentă

Funcționarea motorului este guvernată de o ecuație de bilanț de tensiuni în circuitul rotoric (echilibru elctric) şi o ecuație de bilanț de cupluri (echilibru mecanic):

<u>***Ecuații de bilanț***</u>	<u>***Ecuații elementare***</u>
$u(t) = Ri(t) + L\dfrac{di(t)}{dt} + e(t)$	$e(t) = \Phi \cdot \omega(t)$
$J \cdot \dfrac{d\omega(t)}{dt} = C_m(t) - C_r(t)$	$C_m(t) = \Phi \cdot i(t)$, $C_r(t) = f \cdot \omega(t)$
	$\omega(t) = \dfrac{d\theta(t)}{dt}$

$$\begin{cases} u(t) = Ri(t) + L\dfrac{di(t)}{dt} + \Phi\omega(t) \\ J \cdot \dfrac{d\omega(t)}{dt} = \Phi \cdot i(t) - f\omega(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{di(t)}{dt} = -\dfrac{R}{L}i(t) + \dfrac{1}{L}u(t) - \dfrac{\Phi}{L}\omega(t) \\ \dfrac{d\omega(t)}{dt} = \dfrac{\Phi}{J} \cdot i(t) - \dfrac{f}{J}\omega(t) \end{cases}$$

Deoarece ecuațiile de bilanț şi ecuațiile elementare sunt liniare, se poate aplica transformata Laplace, rezultând ecuațiile algebrice următoare în condiții inițiale nule, adică $i(0) = 0, \quad \omega(0) = 0$:

$$\Rightarrow \begin{cases} s \cdot i(s) = -\dfrac{R}{L}i(s) + \dfrac{1}{L}u(s) - \dfrac{\Phi}{L}\omega(s) \\ s \cdot \omega(s) = \dfrac{\Phi}{J} \cdot i(s) - \dfrac{f}{J}\omega(s) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (Ls + R) \cdot i(s) = u(s) - \Phi\omega(s) \\ (Js + f) \cdot \omega(s) = \Phi \cdot i(s) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} i(s) = \dfrac{1}{(Ls + R)}u(s) - \dfrac{\Phi}{(Ls + R)}\omega(s) \\ \omega(s) = \dfrac{\Phi}{(Js + f)} \cdot i(s) \end{cases}$$

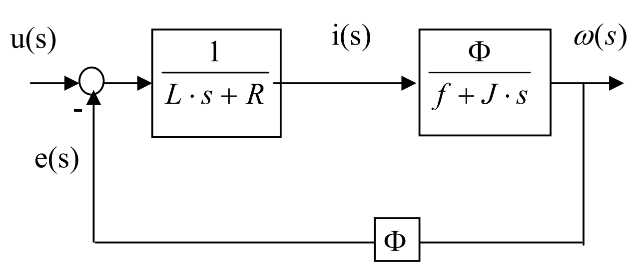
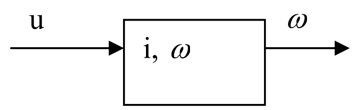


Fig.2. Modelul motorului cu funcții de transfer

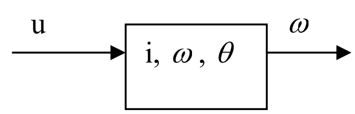
Pentru a descrie sistemul printr-o reprezentare de stare $\begin{cases} \dfrac{d\bar{x}}{dt} = A\bar{x} + B\bar{u} \\ \bar{y} = C\bar{x} \end{cases}$ trebuiesc stabilite variabilele de stare (i, ω):

$$\begin{cases} \dfrac{di(t)}{dt} = -\dfrac{R}{L} i(t) + \dfrac{1}{L} u(t) - \dfrac{\Phi}{L}\omega(t) \\ \dfrac{d\omega(t)}{dt} = \dfrac{\Phi}{J}\cdot i(t) - \dfrac{f}{J}\omega(t) \end{cases}$$

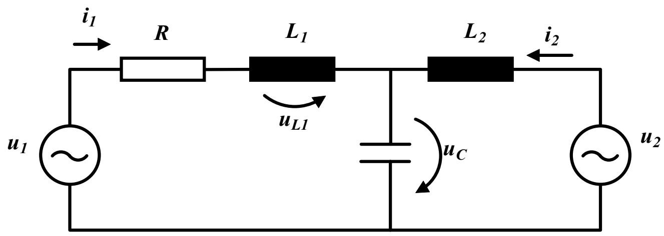


$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\begin{bmatrix} i(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{R}{L} & -\dfrac{\Phi}{L} \\ \dfrac{\Phi}{J} & -\dfrac{f}{J} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u(t) \end{bmatrix} \\ \omega(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \begin{bmatrix} -\dfrac{R}{L} & -\dfrac{\Phi}{L} \\ \dfrac{\Phi}{J} & -\dfrac{f}{J} \end{bmatrix} \\ B = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} \\ C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \end{cases}$$

Dacă variabila de ieşire este θ se adaugă încă o ecuație $\omega(t) = \dfrac{d\theta(t)}{dt}$ şi deci încă o variabilă de stare obținând vectorul de variabile de stare : $\bar{x} = \begin{bmatrix} i \\ \omega \\ \theta \end{bmatrix}$



$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\begin{bmatrix} i \\ \omega \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{R}{L} & -\dfrac{\Phi}{L} & 0 \\ \dfrac{\Phi}{J} & -\dfrac{f}{J} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i \\ \omega \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{1}{L} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot [u] \\ \omega = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i \\ \omega \\ \theta \end{bmatrix} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \begin{bmatrix} -\dfrac{R}{L} & -\dfrac{\Phi}{L} & 0 \\ \dfrac{\Phi}{J} & -\dfrac{f}{J} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ B = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{L} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{cases}$$



Posibilități de înmagazinare a energiei:

- în inductanța L_1 : $E_1 = \frac{1}{2} L i_1^2$
- în inductanța L_2 : $E_2 = \frac{1}{2} L i_2^2$
- în condensatorul C : $E_3 = \frac{1}{2} C u_C^2$

Deci $x_1 = i_1 \quad x_2 = i_2 \quad x_3 = u_C$

Aplicând legile lui Ohm şi Kirchoff se obțin următoarele ecuații:

$$u_1 = i_1 R + L_1 \frac{di_1}{dt} + u_C \qquad \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ u_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R/L_1 & 0 & -1/L_1 \\ 0 & 0 & -1/L_2 \\ 1/C & 1/C & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ u_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/L_1 & 0 \\ 0 & 1/L_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$u_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} + u_C \qquad \text{sau} \quad y_1 = u_{L1} = L_1 \frac{di_1}{dt}$$

$$\frac{du_C}{dt} = \frac{1}{C}\left(i_1 + i_2\right) \qquad y_2 = u_C$$

3.6. Reprezentarea in frecventa

3.6.1. Transformata Fourier

Pentru functiile f(t) definite pe intreg domeniul $-\infty < t < +\infty$ se foloseste transformata Fourier $\mathcal{F}$ directa (functia spectrala sau de frecventa)

$$F(j\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \qquad (1)$$

si transformata Fourier $\mathcal{F}^{-1}$ inversa

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{F(j\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega) e^{-j\omega t} d\omega \qquad (2)$$

Cum transformata Fourier este de cele mai multe ori o functie complexa rezulta

$$F(j\omega) = \mathrm{R}(\omega) + j\,\mathrm{I}(\omega) = A^*(\omega) \cdot e^{j\varphi^*(\omega)}$$

unde s-a notat $\mathrm{R}(\omega)$ si $\mathrm{I}(\omega)$ partea reala si imaginara a functiei $A^{'}(\omega)$ si $\varphi^{'}(\omega)$ amplitudinea si faza acestei functii

$A^*(\omega) = |F(j\omega)| = \sqrt{\mathrm{R}^2(\omega) + \mathrm{I}^2(\omega)}$ este definita ca spectru Fourier sau densitate spectrala a functiei f(t)

$\varphi^*(\omega) = \arg F(j\omega) = arctg \dfrac{\mathrm{I}(\omega)}{\mathrm{R}(\omega)}$ este defint ca defazaj

Daca f(t) este o functie reala din (1) se obtine :

$$R(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \omega t \ dt$$

$$I(\omega) = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin \omega t \ dt$$

La fel ca si transformata Laplace, transformata Fourier exprima o corespondenta univoca.
Transformata Fourier exprima o transformare conforma de la f(t) la F(jω) functia de frecventa sau spectrala.

3.6.2. Caracteristici de frecventa

- functia de transfer

U(s)= =$\mathcal{L}^{-1}$\{u(t)\} $\rightarrow$ **H(s)** $\rightarrow$ **Y(s)= =$\mathcal{L}^{-1}$\{y(t)\}**

$$H(s)=\frac{Y(s)}{U(s)} \text{ unde } s=\sigma+j\omega$$

Pentru $\sigma=0 \quad \Rightarrow \quad s=j\omega$ respectiv $H(s)=H(j\omega)$

$H(j\omega)$ semnificand reprezentarea in frecventa a functiei de transfer (ω este frecventa sau pulsatia)

$$H(j\omega)=\mathrm{Re}(\omega)+j\,\mathrm{Im}(\omega) \text{ sau } H(j\omega)=A(\omega)\cdot e^{j\varphi(\omega)}$$

unde ***atenuarea*** raspunsului la frecventa este $A(\omega)=|H(j\omega)|$
iar ***faza*** raspunsului la frecventa sistemului $\varphi(\omega)=\arg H(j\omega)$

Reprezentarea în frecvență a unui sistem constă în reprezentarea raspunsului sistemului în frecvență la o intrare armonică de amplitudine constanta şi pulsație (frecvență) variabilă

U(ω)= =$\mathcal{F}^{1}$\{u(t)=$A_i$sin(ωt)\} $\rightarrow$ **H(jω)** $\rightarrow$ **Y(ω)= =$\mathcal{F}^{1}$\{y(t)=$A_e$sin(ωt+φ)\}**

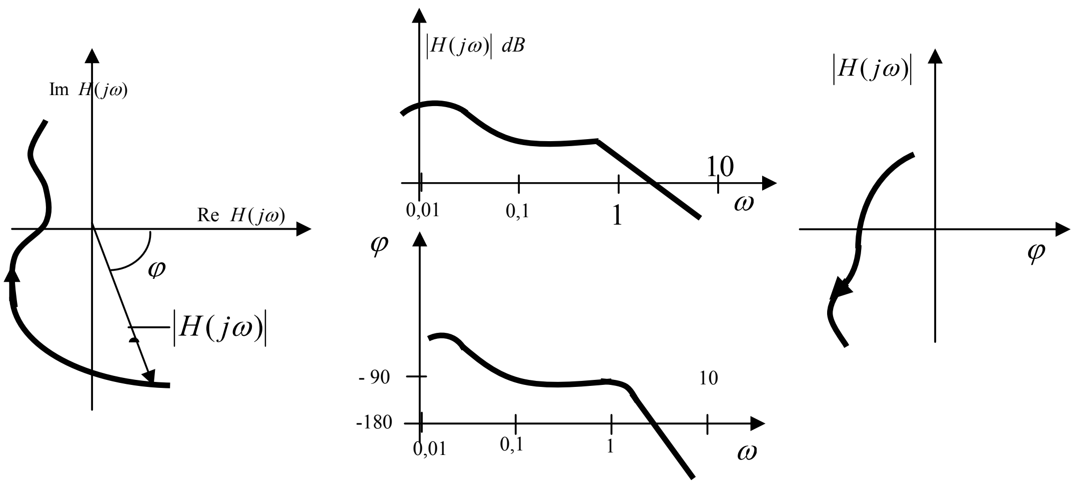
Pentru ω variabil $A_e(\omega)$ iar $\varphi=\varphi(\omega)$

si deci $A(\omega)=\dfrac{A_e(\omega)}{A_i}=|H(j\omega)|=\sqrt{\mathrm{Re}^2(\omega)+\mathrm{Im}^2(\omega)}$

$$\varphi(\omega)=\arg H(j\omega)=arctg\frac{\mathrm{Im}(\omega)}{\mathrm{Re}(\omega)}$$

Se introduc următoarele trei tipuri de reprezentări sau caracteristici ale funcției de transfer:

- locul de transfer (hodograful sau locul lui Nyquist);
- caracteristicile semilogaritmice de frecvență sau diagrame bode (amplitudine - pulsație şi fază - pulsație) $A(\omega)\big|_{dB} = \big|H(j\omega)\big|_{dB} = 20\lg A(\omega)$;
- caracteristica amplitudine - fază.



a b c

dB

Fig.1. Caracteristici ale funcției de transfer:
a - Locul de transfer; b - Caracteristicile semilogaritmice de frecvență;
c - Caracteristica amplitudine - fază.