3. MODURI DE REPREZENTARE A SISTEMELOR CONTINUE

3.1. Reprezentarea prin ecuatii cu derivate partiale

- ecuații cu derivate partiale $\Rightarrow$ liniarizare

$$\boxed{\begin{array}{l} \dfrac{dx}{dt} = f(x,u) \quad cu \quad \begin{array}{l} x = \Delta x + x_0 \\ u = \Delta u + u_0 \end{array} \\ atunci \quad \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{d\Delta x}{dt} = \left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{echilibru \\ x=x_0}} \cdot \Delta x + \left.\dfrac{\partial f}{\partial u}\right|_{\substack{echilibru \\ u=u_0}} \cdot \Delta u \end{array}}$$

3.2. Reprezentarea prin ecuatii diferentiale

- **sisteme monovariabile (SISO)**

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1\frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_{m-1}\frac{d^{m-1}u(t)}{dt^{m-1}} + \ldots + b_1\frac{du(t)}{dt} + b_0 u(t) \qquad (1)$$

$a_i, b_j \in \mathbb{R}, \quad i = \overline{0, n-1} \quad j = \overline{0, m-1} \quad m \le n$

unde $\mathbb{R}$ este mulțimea numerelor reale şi $t \in \mathbb{R}$ este variabila timp

- **sisteme multivariabile (MIMO)**

$$\begin{cases} \dfrac{d\,\bar{x}(t)}{dt} = A\cdot\bar{x}(t) + B\bar{u}(t) + E\bar{v}(t) \\ \bar{y}(t) = C\cdot\bar{x}(t) + D\bar{u}(t) \end{cases} \text{ unde } \begin{array}{l} \bar{x}(t) = \left[x_1(t) \quad x_2(t) \quad \ldots \quad x_m(t)\right]^T \\ \bar{u}(t) = \left[u_1(t) \quad u_2(t) \quad \ldots \quad u_n(t)\right]^T \\ \bar{y}(t) = \left[y_1(t) \quad y_2(t) \quad \ldots \quad y_k(t)\right]^T \\ \bar{v}(t) = \left[v_1(t) \quad v_2(t) \quad \ldots \quad v_l(t)\right]^T \end{array} \text{ şi } \begin{array}{l} A \in \Re^{n\times n} \\ B \in \Re^{n\times m} \\ C \in \Re^{k\times n} \\ D \in \Re^{k\times m} \\ E \in \Re^{n\times l} \end{array}$$

3.3. Reprezentarea cu ajutorul functiei de transfer

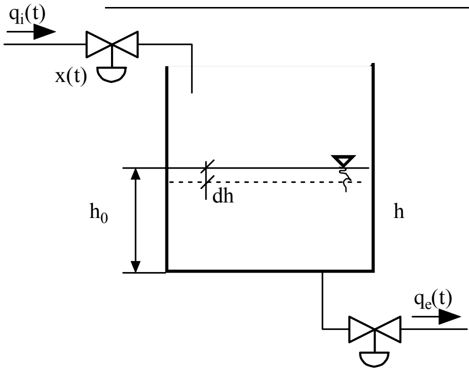
Se aplica transformata Laplace în ambii membrii ai ecuației (1) în condiții inițiale nule :

$$s^n \cdot y(s) + a_{n-1}\cdot s^{n-1}\cdot y(s) + \ldots + a_1 \cdot s \cdot y(s) + a_0 \cdot y(s) = b_{m-1}\cdot s^{m-1}\cdot u(s) + \ldots + b_1 \cdot s \cdot u(s) + b_0 \cdot u(s)$$

$$y(s)\left(s^n + a_{n-1}\cdot s^{n-1} + \ldots + a_1\cdot s + a_0\right) = u(s)\left(b_{m-1}\cdot s^{m-1} + \ldots + b_1 \cdot s + b_0\right) \ ; m \le n$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_{m-1}\cdot s^{m-1} + \ldots + b_1\cdot s + b_0}{s^n + a_{n-1}\cdot s^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot s + a_0}$$

unde : $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$; $U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}$ iar $s = \sigma + j\omega$

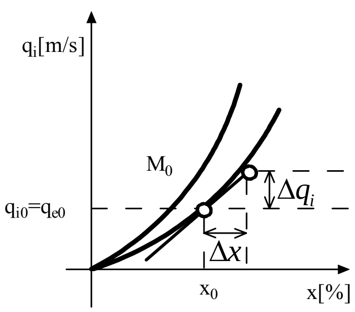


a

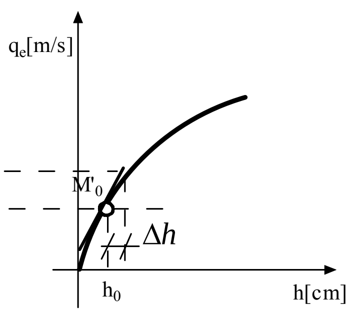
a – Schema tehnologică simplificată a unui rezervor deschis

b – Caracteristica statică a debitului q_i

c - Caracteristica statică a debitului q_e



b



c

În regim staționar:

$$q_e = q_i$$

În regim dinamic:

$$q_i - q_e = \frac{dV}{dt} \Rightarrow \quad q_i - q_e = S\frac{dh}{dt}$$

$$\begin{cases} q_i = f(x,p) \\ q_e = g(h) \end{cases} \Rightarrow \quad S\frac{dh}{dt} + g(h) = f(x,p)$$

Se liniarizează în jurul punctului de funcționare M_0 (M'_0)

$$q_i = f(x,p) = q_{i0} + \left.\frac{\partial q_i}{\partial x}\right|_{x=x_0}(x-x_0) + \left.\frac{\partial q_i}{\partial p}\right|_{p=p_0}(p-p_0) +$$

$$+\frac{1}{2}\left[\left.\frac{\partial^2 q_i}{\partial x^2}\right|_{x=x_0}(x-x_0)^2 + 2\left.\frac{\partial^2 q_i}{\partial x\partial p}\right|_{\substack{x=x_0\\p=p_0}}(x-x_0)(p-p_0) + \left.\frac{\partial^2 q_i}{\partial p^2}\right|_{p=p_0}(p-p_0)^2\right] + \ldots$$

$$q_i \cong q_{i0} + \left.\frac{\partial q_i}{\partial x}\right|_{x=x_0}(x-x_0) + \left.\frac{\partial q_i}{\partial p}\right|_{p=p_0}(p-p_0); \; q_e \cong q_{e0} + \left.\frac{\partial q_e}{\partial h}\right|_{h=h_0}(h-h_0)$$

$$\Delta q_i = q_i - q_{i0}; \quad \Delta q_e = q_e - q_{e0}; \quad \Delta h = h - h_0; \quad \Delta x = x - x_0; \quad \Delta p = p - p_0$$

Se notează: $\dfrac{\partial q_i}{\partial x} = k_x; \quad \dfrac{\partial q_i}{\partial p} = k_p; \quad \dfrac{\partial q_e}{\partial h} = k_h$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta q_i = k_x\Delta x + k_p\Delta p \\ \Delta q_e = k_h\Delta h \end{cases} \Rightarrow \quad S\frac{d(h_0+\Delta h)}{dt} + q_{e0} + k_h\Delta h = q_{i0} + k_x\Delta x + k_p\Delta p \text{ dar } q_e = q_i$$

$$\Rightarrow \quad S\frac{d(\Delta h)}{dt} + k_h\Delta h = k_x\Delta x + k_p\Delta p \overset{\mathcal{L}}{\Rightarrow} \left(\frac{S}{k_h}+1\right)\Delta h(s) = \frac{k_x}{k_h}\Delta x(s) + \frac{k_p}{k_h}\Delta p(s)$$

pentru $\Delta p = 0 \Rightarrow H_{xh}(s) = \dfrac{\Delta h(s)}{\Delta x(s)} = \dfrac{k_x / k_h}{((S/k_h)s+1)} = \dfrac{K_1}{Ts+1}$

şi pentru $\Delta x = 0 \Rightarrow H_{ph}(s) = \dfrac{\Delta h(s)}{\Delta p(s)} = \dfrac{k_p / k_h}{((S/k_h)s+1)} = \dfrac{K_2}{Ts+1}$

3.3.1. Transformata Laplace

Transformata Laplace directa : $F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt = \mathcal{L}\{f(t)\}$ (1)

unde *f(t)* este functia original (*f(t)=0* pentru *t<0*),
F(s) functia imagine (transformata Laplace)
iar $s = \sigma + j\omega$ variabila complexa

Transformata Laplace conform (1) transforma « domeniul timp » (domeniul original) in « domeniul frecventa » (domeniul imagine)

Transformata Laplace inversa :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\omega}^{c+j\omega} F(s) e^{st} ds = \mathcal{L}^{-1}\{f(t)\} \qquad (2)$$

Transformata Laplace exprima o corespondenta *reversibila* si *univoca* dintre functia original si functia imagine

Rezolvarea ecuatiilor diferentiale cu ajutorul transformatei Laplace se realizeaza in trei pasi :
1. transpunerea ecuatiei diferentiale in domeniul imagine
2. rezolvarea ecuatiei algebrice in domeniul imagine
3. transformata Laplace inversa a solutiei in domeniul original

Exemplu :

$$\ddot{f}(t) + 3\dot{f}(t) + 2f(t) = e^{-t}$$

Proprietăţi de calcul uzuale ale transformării Laplace [11], [14].

Denumirea teoremei	Relaţia de calcul, cu notaţiile: f - funcţia original şi $F(s) \equiv \mathcal{L}\{f(t)\}$ - transformata Laplace
Teorema de liniaritate	$\mathcal{L}\{\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)\} = \alpha F_1(s) + \beta F_2(s)$, $\forall \alpha, \beta \in \mathcal{R}$ şi $\forall f_1, f_2 \in \mathcal{O}$
Teorema asemănării	$\mathcal{L}\{f(\alpha t)\} = \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{s}{\alpha}\right)$, $\forall \alpha \in \mathcal{R}$, $\alpha > 0$
Teorema deplasării argumentului complex	$\mathcal{L}\{f(t)e^{at}\} = F(s-a)$, $\forall a \in \mathcal{R}$, $a > 0$
Teorema derivării transformatei	$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{\mathrm{d}^n F(s)}{\mathrm{d}s^n}$
Teorema integrării originalului	$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\theta)\mathrm{d}\theta\right\} = \frac{1}{s} F(s)$
Teorema derivării originalului	$\mathcal{L}\left\{\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\right\} = sF(s) - f(0_+)$ $\mathcal{L}\left\{\frac{\mathrm{d}^2 f(t)}{\mathrm{d}t^2}\right\} = s^2 F(s) - sf(0_+) - f'(0_+)$ $\mathcal{L}\left\{\frac{\mathrm{d}^n f(t)}{\mathrm{d}t^n}\right\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0_+) - \ldots - sf^{(n-2)}(0_+) - f^{(n-1)}(0_+)$ cu $f^{(k)}(0_+) = \lim\limits_{\substack{t \to 0 \\ t>0}} f^{(k)}(t)$, $0 \le k < n$ şi $f^{(k)}$ derivata de ordinul k a lui f
Teorema valorii finale	Dacă $f \in \mathcal{O}$ este derivabilă şi derivata sa este $f' \in \mathcal{O}$ şi, în plus, există $f(\infty) = \lim\limits_{t \to \infty} f(t)$, atunci $\lim\limits_{s \to 0} sF(s) = f(\infty)$.
Teorema valorii iniţiale	Dacă $f \in \mathcal{O}$ este derivabilă şi derivata sa este $f' \in \mathcal{O}$ şi dacă există $f(0_+) = \lim\limits_{\substack{t \to 0 \\ t>0}} f(t)$ şi $\lim\limits_{s \to \infty} sF(s)$, atunci $\lim\limits_{s \to \infty} sF(s) = f(0_+)$.
Transformata Laplace a produsului de convoluţie a două semnale	Dacă $f_1, f_2 \in \mathcal{O}$ şi $f_1 * f_2 \in \mathcal{O}$, atunci $(f_1 * f_2)(t) = \int_0^t f_1(\theta) f_2(t-\theta)\mathrm{d}\theta \xrightarrow{\mathcal{L}} F_1(s) \cdot F_2(s)$
Teorema întârzierii	Dacă $f_1, f_2 \in \mathcal{O}$, $\theta > 0$, $f_1(t) = 0$, dacă $t < \theta$ şi $f_1(t) = f_2(t-\theta)$, dacă $t \ge \theta$, atunci $F_1(s) = e^{-s\theta} F_2(s)$

Transformate Laplace ale unor funcții elementare

Funcția $f \in \mathcal{O}$	Transformata Laplace $F(s) \equiv \mathcal{L}\{f(t)\}$
$\delta(t)$ [7] (impulsul Dirac de arie unitară, cu $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\mathrm{d}t = 1$)	1
$1(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$ (funcția treaptă unitară)	$\frac{1}{s}$
$1(t) \cdot t$ (funcția rampă unitară)	$\frac{1}{s^2}$
$1(t) \cdot \frac{t^n}{n!}$	$\frac{1}{s^{n+1}}$
$1(t) \cdot e^{at}$, $a \in \mathcal{C}$	$\frac{1}{s-a}$
$1(t) \cdot \frac{t^n}{n!} \cdot e^{at}$	$\frac{1}{(s-a)^{n+1}}$
$1(t) \cdot \sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$1(t) \cdot \cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
$1(t) \cdot e^{at} \cdot \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s-a)^2 + \omega^2}$
$1(t) \cdot e^{at} \cdot \cos \omega t$	$\frac{s-a}{(s-a)^2 + \omega^2}$

3.3.2. Functia de transfer

$$H(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{b_m\cdot s^m+\ldots+b_1\cdot s+b_0}{s^n+a_{n-1}\cdot s^{n-1}+\ldots+a_1\cdot s+a_0} \qquad m\le n$$

forma ireductibila

$$H(s)=\frac{Z(s)}{P(s)}=\frac{b_{p-1}\cdot s^{p-1}+\ldots+b_1\cdot s+b_0}{s^p+a_{p-1}\cdot s^{p-1}+\ldots+a_1\cdot s+a_0}=k\frac{\left(s-z_{p-1}\right)\cdot\ldots\cdot\left(s-z_1\right)}{\left(s-p_p\right)\cdot\ldots\cdot\left(s-p_1\right)}$$

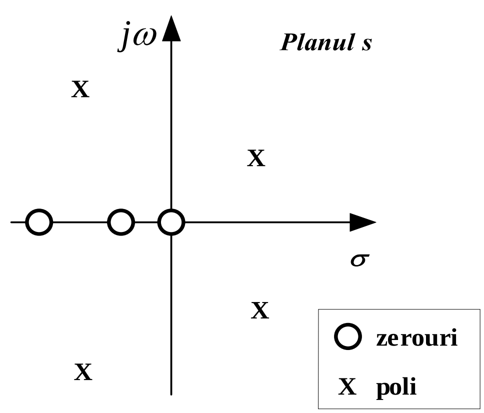
unde : $Y(s)=\mathcal{L}\{y(t)\}$; $U(s)=\mathcal{L}\{u(t)\}$ iar $s=\sigma+j\omega$

Z(s) si *P(s)* sunt polinoame de ordinul *p-1*, respectiv *p*

- Sistemul este **fizic realizabil** daca *gr Z(s) < gr P(s)*

Ecuatia caracteristica *P(s)=0*, furnizeaza **polii functiei de transfer** (zerourile numitorului):

$P(s)=0 \Rightarrow \mathcal{P}\left[H(s)\right]=\left\{p_1,\ldots,p_p\right\}\in\mathbb{C}$



Zerourile functiei de transfer sunt radacinile polinomului de la numarator :

$Z(s)=0 \Rightarrow \mathcal{Z}\left[H(s)\right]=\left\{z_1,\ldots,z_{p-1}\right\}\in\mathbb{C}$

Exemplu :

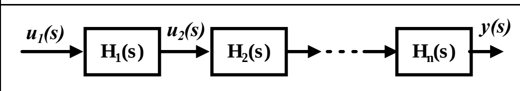
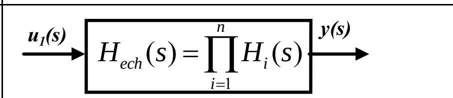
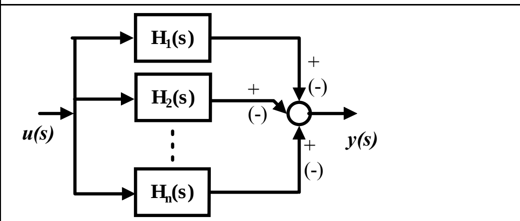
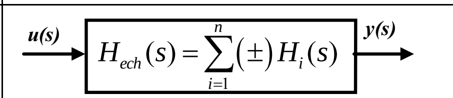
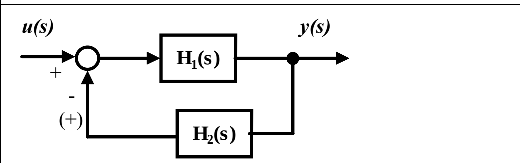
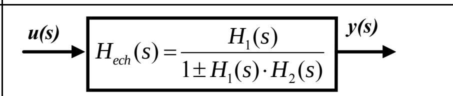
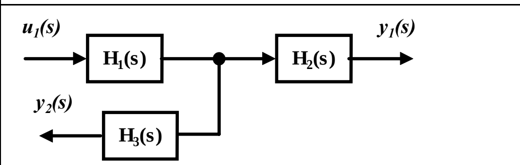
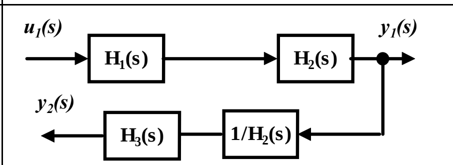
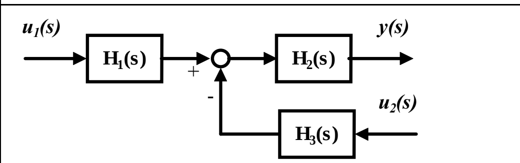
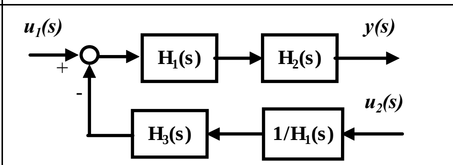
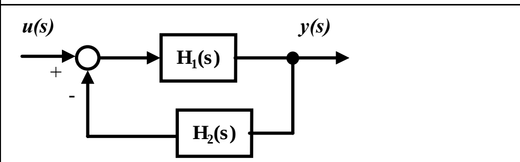
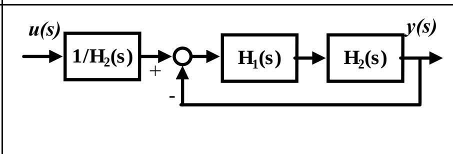
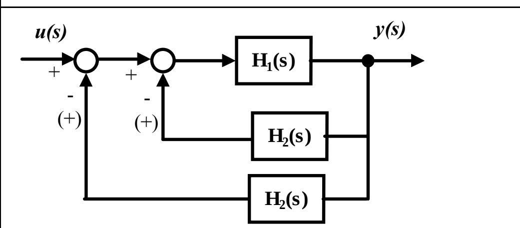
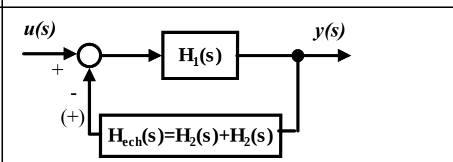
$$H(s)=\frac{s^2+4s+3}{s^4-3s^2-2s}=\frac{(s+1)(s+3)}{s(s^3-3s-2)}=\frac{(s+1)(s+3)}{s(s-2)(s^2+2s+1)}$$

- **Ordinul** functiei de transfer este dat de ***gr P(s)***

- **Tipul functiei de transfer** este dat de ***numarul polilor in origine ai functiei de transfer***

3.3.3. Calculul functiilor de transfer sau algebra schemelor bloc

Tabelul 1. **Reguli principale ale algebrei schemelor bloc**

Nr crt	*Regula*	*Schema inițială*	*Schema echivalentă*
1	Legarea în serie (cascadă)		
2	Cuplarea în derivație (paralel înainte)		
3	Cuplarea în buclă (paralel înapoi)		
4	Deplasarea unui punct de ramificație pe direcția acțiunii (spre ieșire)		
5	Deplasarea unui punct de sumare contrar direcției acțiunii (spre intrare)		
6	Rigidizarea unei reacții elastice		
7	Sumarea unor reacții multiple		

3.4. Reprezentarea cu ajutorul raspunsului in timp

Raspunsul indicial (raspunsul la intrare treapta)

Functia pondere (raspunsul la impuls)

$$1(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ 1/\varepsilon & 0 \leq t \leq \varepsilon \end{cases} \qquad \varepsilon = 0_+$$

Proprietati :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1$$

$$\delta(t) = \frac{d1(t)}{dt} \; ; \; g(t) = \frac{dh(t)}{dt}$$