LUCRAREA nr.4:
Stabilitatea sistemelor liniare. Criterii de stabilitate. Reprezentare în frecvență.

1. **Scopul lucrării**

Se va face analiza stabilității interne și externe a sistemelor liniare cu o intrare și o ieșire, pe baza modurilor de reprezentare in timp si frecventa. Se va studia stabilitatea externa a sistemelor cu ajutorul criteriului de stabilitate Routh-Hurwitz.

Se va studia stabilitatea sistemelor in circuit închis pe baza reprezentarii in frecventă cu ajutorul criteriilor de stabilitate Nyquist şi Bode.

2. **Breviar teoretic**

Se spune că un sistem fizic realizabil este stabil faţă de o situaţie de echilibru staţionar, dacă sub acţiunea unei perturbaţii exterioare (impuls Dirac) îşi părăseşte starea de echilibru stabil, tinzând să revină, după un timp finit (şi perturbaţia a disparut), intr-o stare de echilibru staţionar cu sau fără eroare staţionară. Dacă acest lucru nu este realizat, în sensul că mărimea de ieşire are o variaţie cu amplitudine din ce în ce mai mare în timp (oscilant sau aperodic), se spune ca sistemul este instabil.

Se introduc două tipuri de stabilitate:

- stabilitate internă (sau în sens Liapunov);
- stabilitatea externă (sau de tip intrare mărginită - ieşire mărginită BIBO).

Un sistem (A,b,c^T) este:

a) **stabil (intern)** dacă $\exists M > 0$, astfel încât $\left\| e^{At} \right\| \le M, \forall t \ge 0$

b) **asimptotic stabil (intern)** dacă $e^{At} \to 0$, când $t \to \infty$

Se pot demonstra următoarele teoreme.

Un sistem (A,b,c^T) este:

- **intern stabil**, dacă şi numai dacă valorile proprii ale matricei A are toate $\operatorname{Re}\lambda_i \le 0$, iar acele valori proprii care au partea reală nulă trebuie să fie rădăcini simple ale polinomului minimal.
- **intern asimptotic stabil**, dacă şi numai dacă valorile proprii ale matricei A au $\operatorname{Re}\lambda_i < 0$, aceasta condiţie fiind echivalentă cu

$$\sigma(A) \subset \mathbf{C}^- \tag{1}$$

unde $\sigma(A)$ este **spectrul matricei *A*.**

- **Stabilitate externă**

Un sistem (A,b,c^T) este:

a) **stabil (extern)** dacă $\exists M > 0$ astfel încât $|h(t)| \le M, \ \forall t \ge 0$

b) **strict stabil (extern)** dacă $h(t) \to 0$ când $t \to \infty$

Se pot demonstra următoarele teoreme.

Un sistem *(A,b,c^T)* este:

- **extern stabil**, dacă şi numai dacă polii funcţiei de transfer au $\operatorname{Re} p_i \le 0$ iar acei poli care au partea reală nulă trebuie să fie poli simpli.
- **extern strict stabil**, dacă şi numai dacă polii funcţiei de transfer au $\operatorname{Re} p_i < 0$, această condiţie fiind echivalentă cu:

$$\mathcal{P}\left[H(s)\right] \subset \mathbf{C}^- \tag{2}$$

Se observă imediat ca **stabilitatea internă implică pe cea externă**

$$\sigma(A) \subset \mathbf{C}^- \Rightarrow \mathcal{P}\left[H(s)\right] \subset \mathbf{C}^- \tag{3}$$

Reciproca nu este adevarată (cu excepţia cazului când forma primara a lui *H(s)* este introductibilă, fapt ce determină transformarea incluziunii în egalitate).

Criteriul Routh-Hurwitz este un criteriu cu ajutorul căruia se poate determina stabilitatea sistemelor luniare pornind de la coeficienții polinomului caracteristic.

Fie polinomul caracteristic:

$$\chi_A(s) = c_0 s^n + c_1 s^{n-1} + \ldots\ldots + c_n \tag{4}$$

complet şi cu toţi coeficienţii pozitivi.

Condiţia necesară şi suficientă ca rădăcinile lui $\chi_A(s)$ să aibă partea reală strict negativă este ca toţi determinanţii principali ai matricei Hurwitz să fie strict pozitivi:

$$D_n = \begin{vmatrix} c_1 & c_3 & c_5 & \cdots & 0 \\ c_0 & c_2 & c_4 & \cdots & 0 \\ 0 & c_1 & c_3 & \cdots & 0 \\ 0 & c_0 & c_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0_1 & \cdots & \cdots & \cdots & c_n \end{vmatrix} > 0 \cdots \quad D_1 = c_1 > 0 \quad D_2 = \begin{vmatrix} c_1 & c_3 \\ c_0 & c_2 \end{vmatrix} > 0 \tag{5}$$

Dacă un minor pe diagonală $D_i < 0$ atunci rezultă că sistemul este instabil, nemaifiind necesară calcularea tuturor determinanţilor matricei Hurwitz.

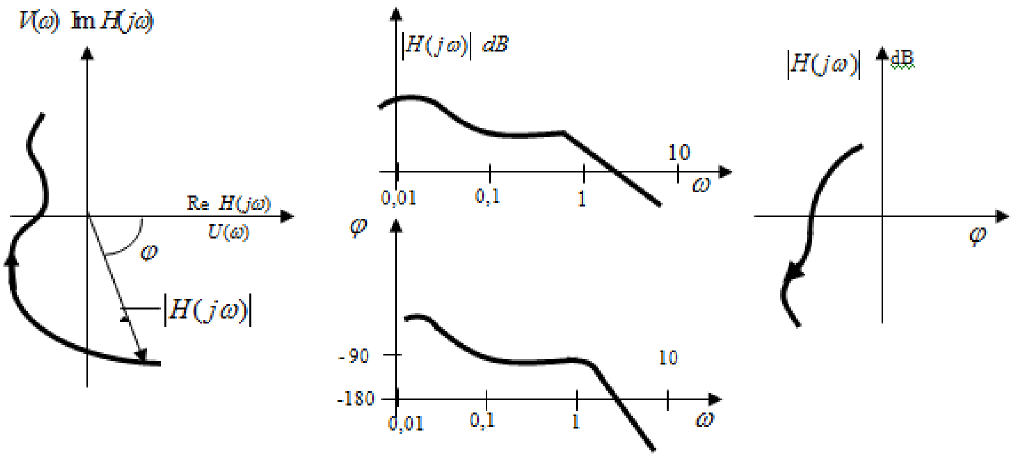
Reprezentarea în frecvență se realizează cu schimbarea de variabilă s=jω. Astfel, funcţia de transfer H(s) a unui sistem se poate scrie:

H(jω)=|H(jω)|e$^{j\omega}$ = |H(jω)|e$^{j \arg H(j\omega)}$ = Re H(jω)+jIm H(jω)=U(ω)+jV(ω) (1)

Analiza în frecvenţă a unui sistem constă în studiul regimului permanent armonic al mărimii de iesire la o intrare armonică de amplitudine constantă şi pulsaţie (frecvenţă) variabilă.

Se introduc următoarele trei tipuri de reprezentări sau caracteristici ale funcţiei de transfer:

- locul de transfer (hodograful sau locul lui Nyquist);
- caracteristicile semilogaritmice de frecvenţă (amplitudine - pulsaţie şi fază - pulsaţie);
- caracteristica amplitudine - fază.



a b c

Fig.1. Caracteristici ale funcţiei de transfer: a - Locul de transfer; b - Caracteristicile semilogaritmice de frecvenţă; c - Caracteristica amplitudine - fază.

Aprecierea stabilităţii se poate face direct prin criteriul Hurwitz sau apelând la analiza frecvenţei prin criteriile Nyquist si Bode.

Stabilitatea SRA poate fi analizată prin *Criteriul Nyquist* pe baza hodografului funcţiei de transfer din bucla $H_b(s)$. Se trasează hodograful pentru $H_b(s)$ şi se analizează stabilitatea pentru $H_0(s)=\dfrac{H_b(s)}{1+H_b(s)}$.

Criteriul Nyquist generalizat:

Condiţia necesară şi suficientă ca un SRA să fie stabil este ca locul de transfer (hodograful) lui $H_b(s)$ să înconjoare punctul critic (-1,j0) în sens trigonometric de atâtea ori câţi poli are $H_b(s)$ în interiorul conturului Nyquist.

Criteriul Nyquist simplificat:

Condiţia necesară şi suficientă ca un SRA să fie stabil este ca hodograful lui $H_b(s)$ să nu înconjoare punctul critic (-1,j0) (se consideră $H_b(s)$ stabil).

Criteriul Bode

Acest criteriu analizează stabilitatea SRA pe baza caracteristicilor semilogaritmice ale funcţiei de transfer din bucla deschisă $H_b(s)$, permiţând determinarea rezervei de stabilitate a sistemului $H_0(s)$.

Rezerva de stabilitate a unui SRA se evaluează prin două mărimi caracteristice:

* marginea de amplitudine (rezerva de stabilitate în modul) $m_{dB}=-\left|H_b(j\omega_\Pi)\right|_{dB}$
* marginea de fază (rezerva de stabilitate în fază) $\gamma=180^o+\varphi(\omega_t)$

unde ω_t este pulsaţia de tăiere ($\left|H_b(j\omega_t)\right|_{dB}=0$) iar ω_Π pulsaţia la care sistemul $H_b(s)$ are o fază egală cu -Π.

Criteriul Bode reprezintă transpunerea în scara logaritmică a criteriului Nyquist simplificat. El se exprimă astfel: *Condiţia necesară şi suficientă ca un SRA să fie stabil este ca reprezentarea fază-pulsaţie să intersecteze axa ω într-un punct situat după intersecţia cu aceeaşi axă a reprezentării amplitudine pulsaţie (deci $\omega_\Pi>\omega_t$).*

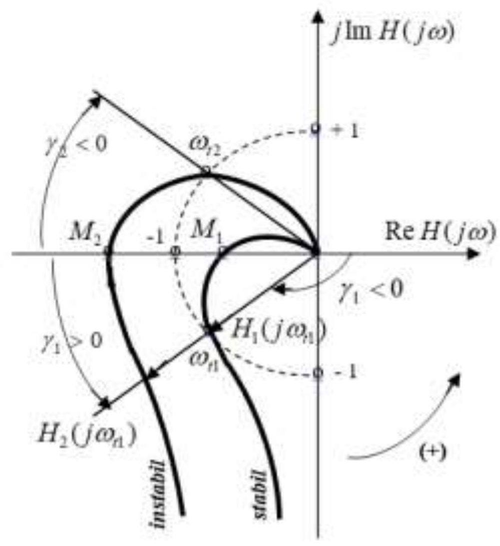


Fig.4. Criteriul Nyquist simplificat

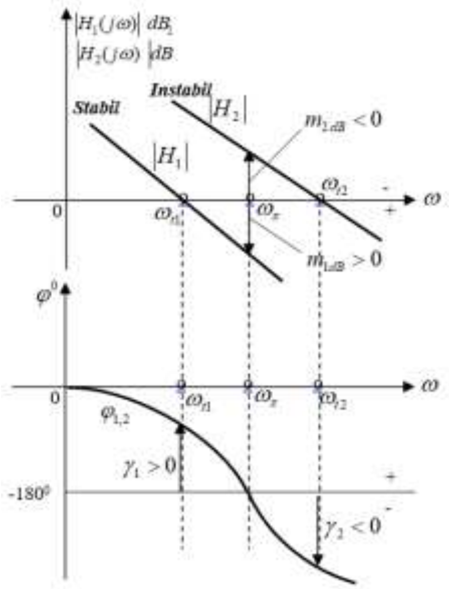


Fig.5. Criteriul Bode

3. **Aplicații**

3.1 Se consideră un sistem definit printr-o funcţie de transfer de tipul

$$\boldsymbol{H_b}(s) = \frac{s+1}{s^3+s^2}$$

. Se dorește studierea stabilităţii acestui sistem cu ajutorul criteriului de stabilitate Routh-Hurwitz.

Astfel, se determină polinomul caracteristic :

$$\chi_A(s) = 1 + H(s) = s^3 + s^2 + s + 1$$

Se verifică dacă toţi coeficienții polinomului caracteristic sunt >0:

Dacă aceste condiții sunt îndeplinite, se alcătuieşte matricea Hurwitz, după care se calculează minorii pe diagonalã.

$$D_3 = \begin{vmatrix} c_1 & c_3 & 0 \\ c_0 & c_2 & 0 \\ 0 & c_1 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \geq 0$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} c_1 & c_3 \\ c_0 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$D_1 = |1| = 1$$

Rezolvarea acestei probleme utilizând comenzile MATLAB se realizează în modul următor:

```
>>num=[1 1];
>>den=[1 1 0 0];
>>H=tf(num,den);
Transfer function:
  s + 1
---------
s^3 + s^2
% determinarea polinomului caracteristic
```

```
>>X=1+H
Transfer function:
s^3 + s^2 + s + 1
-----------------
    s^3 + s^2
%matricea Hurwitz
>>D1=[1 1 0;1 1 0;0 1 1]
D1 =  1     1     0
      1     1     0
      0     1     1
%calcularea determinantului
>>det(D1)
ans =
     0
```

Pentru acest exemplu determinantul matricei Hurwitz $D_3 = 0$ indică un sistem la limita de stabilitate.

4. **Chestiuni de studiat**

4.1. Se dă un sistem definit prin funcţia de transfer:

$$H_b(s) = \frac{s}{s^3 + 5 * s^2 + 3 * s + 1}$$

Să se determine stabilitatea sistemului cu ajutorul criteriului Routh-Hurwitz.

4.2. Determinați stabilitatea următoarelor sisteme, caracterizate de funcţiile de transfer în circuit deschis, cu ajutorul criteriilor Bode şi Nyquist:

$$H_b(s) = \frac{k_1}{(s+0.1)(s+0.8)(s+5)}, \qquad k_1=100, \qquad k_1=5$$

4.3. Determinați stabilitatea următoarelor sisteme, caracterizate de funcţiile de transfer în circuit deschis, cu ajutorul criteriilor Bode şi Nyquist:

$$H_b(s) = \frac{k_2}{s(s+3)(s+13)}, \qquad k_2=1000, \qquad k_2=10$$

Observaţii:

Matlab

1. *Definirea funcţiilor de transfer în Matlab se face cu ajutorul variabilelor* **num** *şi* **den**.

   Exp: $H(s) = \frac{2s+3}{s^2+5s+0.4}$ num=[2 3]; den=[1 5 0.4]

2. *Pentru reprezentare în frecvenţă se folosesc funcţiile* ***nyquist(num,den)*** *şi* ***bode(num,den)*** *sau* ***margin(num,den)****. Amănunte despre folosirea acestor funcţii se pot obţine tastând în linia de comanda Matlab:*

   ```
   >> help nyquist          >>help margin
   >> help bode
   ```

Scilab

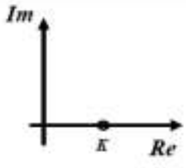
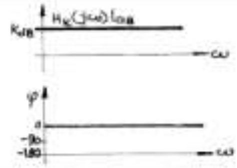
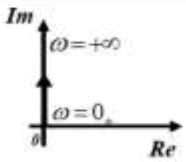
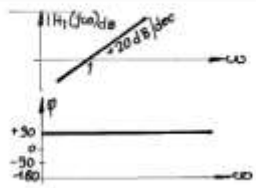
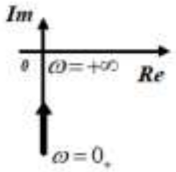
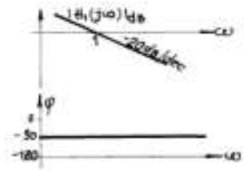
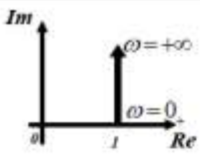
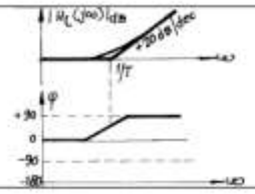
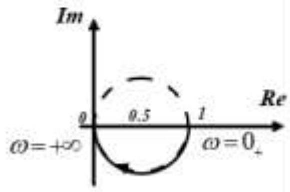
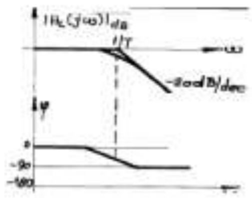
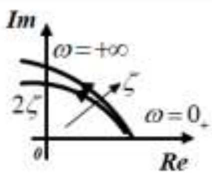
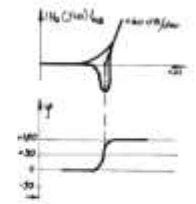
1. *Definirea funcţiilor de transfer în Scilab se face astfel:*

Exp: $H(s) = \dfrac{2s + 3}{s^2 + 5s + 0.4}$

>>s=poly(0,'s')
>>h=syslin('c', (2*s + 3) / (s^2 + 5*s + 0.4))

2. *Pentru reprezentare în frecvenţă se folosesc funcţiile* ***nyquist(h)*** *şi* ***bode(h)*** *sau* ***show_margins(h)****. Amănunte despre folosirea acestor funcţii se pot obţine tastând în linia de comanda Scilab:*
   >> help nyquist
   >>help bode
   >>help show_margins

Tabelul nr.1.

Nr. Crt.	Denumirea termenului tip Funcția de transfer	Locul de transfer	Caracteristici semilogaritmice
1	**Element constant:** $H_k(j\omega)=k$		
2	**Element derivativ:** $H_{I_d}(j\omega)=j\omega$		
3	**Element integrator:** $H_{I_i}(j\omega)=\dfrac{1}{j\omega}$		
4	**Element de anticipare de ordinul 1:** $H_{L_1}(j\omega)=j\omega T+1$		
5	**Element de întârziere de ordinul 1:** $H_{L_i}(j\omega)=\dfrac{1}{j\omega T+1}$		
6	**Element de anticipare de ordinul 2:** $H_{Q_i}(j\omega)=\left(1-T^2\omega^2\right)+j\omega 2\zeta T$		
7	**Element de întârziere de ordinul 2:** $H_Q(j\omega)=\dfrac{k}{\left(1-T^2\omega^2\right)+j\omega 2\zeta T}$