Lucrarea nr. 2

Algebra schemelor bloc

1. Noțiuni introductive

Stabilirea funcției de transfer pentru orice element al unui sistem dat se face pornind de la ecuațiile diferențiale lineare ce caracterizează funcțional analitic elementul respectiv și aplicând transformata directă Laplace, în condiții inițiale nule (figura 1).

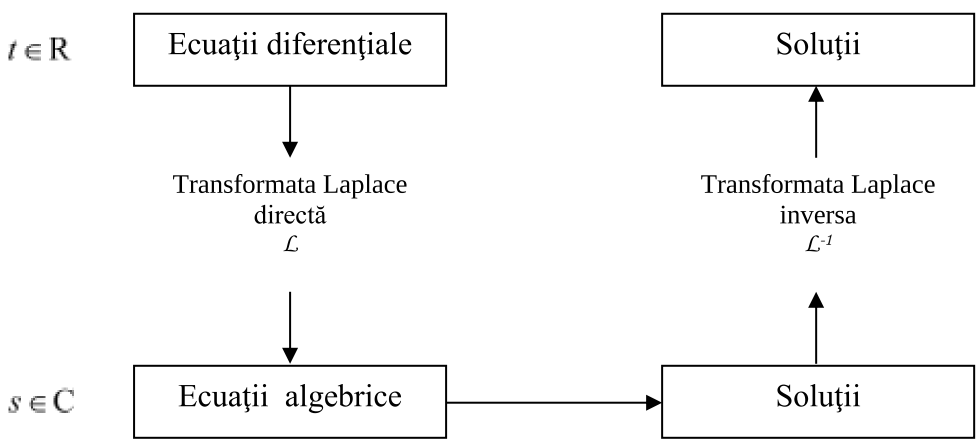


Fig.1. Schema de rezolvare a ecuaţiilor diferenţiale prin transformata Laplace

Ca exemplu se consideră cazul unui piston sub presiune (fig.2.) unde:

$x(t)$ = *deplasare piston (mărimea de ieșire)*
$p(t)$ = *presiunea la intrarea în piston (mărimea de intrare)*
S_0 = *suprafața pistonului*
m = *masa pistonului*
k = *constanta de elasticitate a arcului*

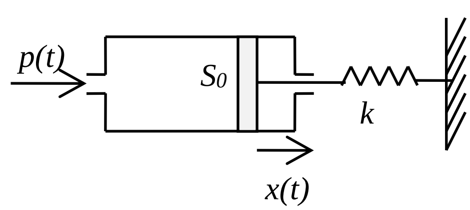


Fig.2. Piston sub presiune

Ecuația diferențială ce definește procesul de mai sus este:

$$m \cdot \frac{d^2x(t)}{dt^2} = p(t)\cdot S_0 - k \cdot x(t) \qquad \ddot{x} + \frac{k}{m}\cdot x - \frac{S_0}{m}\cdot p = 0$$

Aplicând transformata Laplace directă ecuației de mai sus se obține:

$$s^2 x(s) + \frac{k}{m} x(s) - \frac{S_0}{m} \cdot p(s) = 0 \qquad \Rightarrow H(s) = \frac{x(s)}{p(s)} = \frac{\frac{S_0}{m}}{s^2 + \frac{k}{m}}$$

Pentru sistemul descris de funcția de transfer de mai sus se calculează mărimea de ieșire dacă se aplică un semnal treaptă la intrare, în condiții inițiale nule.

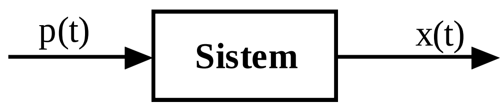


Fig. 3. Mărimile de intrare și ieșire pentru sistemul propus

Se aplică transformata Laplace inversă ecuației $x(s) = \frac{\frac{S_0}{m}}{s^2 + \frac{k}{m}} p(s)$, unde

$$p(s) = L[p(t)] = L[1(t)] = \frac{1}{s} \qquad \Rightarrow x(t) = L^{-1}[x(s)] = \frac{S_0}{K}(1 - \cos\sqrt{\frac{k}{m}} t)$$

2. Teoremele transformatei Laplace

Noțiuni de transformata Laplace directă și inversă sunt prezentate în continuare iar regulile de transformare Laplace sunt conținute în anexa 1.

- *Transformata Laplace directă* $F(s) = L[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-st} dt$
- *Transformata Laplace inversă* $f(t) = L^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\Pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s) \cdot e^{+ts} ds$
- *Transformata Laplace a derivatei*

  $L[f^{(n)}(t)] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0_+) - s^{n-2} \dot{f}(0_+) \ldots\ldots - f^{(n-1)}(0_+)$

  $L[\ddot{f}(t)] = s^2 F(s) - sf(0_+) - \dot{f}(0_+)$
- *Translație in timp* $L[f(t - T_m)] = e^{+T_m s} \cdot F(s)$

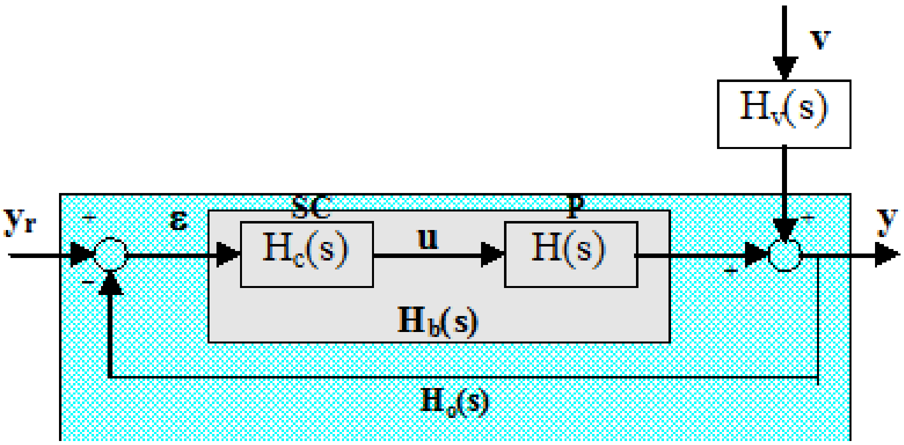
3. Reguli ale algebrei schemelor bloc

Operațiile cu funcții de transfer, alcătuind așa-numită "algebră a funcției de transfer" sunt bazate pe reguli de calcul simple care permit stabilirea funcțiilor de transfer echivalente pentru principalele moduri de conexiune ale elementelor unui sistem.

Algebra schemelor bloc constă într-un ansamblu de reguli de transfigurare sau simplificare a sistemelor cu bucle multiple reprezentate sub formă de scheme bloc.

Regulile principale de calcul ale algebrei funcțiilor de transfer, sau a schemelor bloc, folosite în analiza sistemelor automate, respectiv SRA, se prezintă în anexa 2.

Schemele bloc cuprind elemente ale instalației de automatizare cu legăturile funcționale dintre ele, astfel încât din ele să rezulte principiul de funcționare a circuitelor.



y_r=*mărimea de referință*
y=mărimea de ieșire
ε=eroarea
u=mărimea de comandă
v=perturbația
SC-sistem compensator
(regulator automat)
P-proces

Fig.4. Schema funcțională bloc a unui SRA

Se introduc următoarele funcții de transfer reprezentative:

- funcția de transfer în circuit deschis: $H_b(s) = \left.\dfrac{y(s)}{\varepsilon(s)}\right|_{v=0} = H_c(s) \bullet H(s)$
- funcția de transfer în circuit închis: $H_0(s) = \left.\dfrac{y(s)}{y_r(s)}\right|_{v=0} = \dfrac{H_b(s)}{1+H_b(s)}$
- funcția de transfer a erorii: $H_\varepsilon(s) = \left.\dfrac{\varepsilon(s)}{y_r(s)}\right|_{v=0} = \dfrac{1}{1+H_b(s)}$
- funcția de transfer a perturbației: $H_p(s) = \left.\dfrac{y(s)}{v(s)}\right|_{y_r=0} = \dfrac{H_v(s)}{1+H_b(s)}$

4. Chestiuni de studiat:

4.1. Să se creeze un fișier Simulink care să conțină schema bloc din figura 5.

Indicație: Rotirea unui bloc se face prin click dreapta $\rightarrow$ Rotate &Flip Block.

4.2. Să se studieze răspunsul sistemului în cazul aplicării la intrare a unui semnal treaptă.

Indicație: Momentul aplicării treptei (Step time) se alege 0 sec.

4.3. Cu ajutorul anexei nr.2 să se calculeze funcția de transfer echivalentă în circuit deschis și în circuit închis.

4.4. Să se compare răspunsul sistemului inițial, y, obținut în urma simulării schemei din figura 5 cu răspunsul sistemului echivalent, y_e, obținut în urma simulării schemei din figura 6.

4.5. Cu ajutorul anexei nr.1 să se calculeze răspunsul în timp al sistemului, y(t), în cazul aplicării la intrare a unui semnal treaptă.

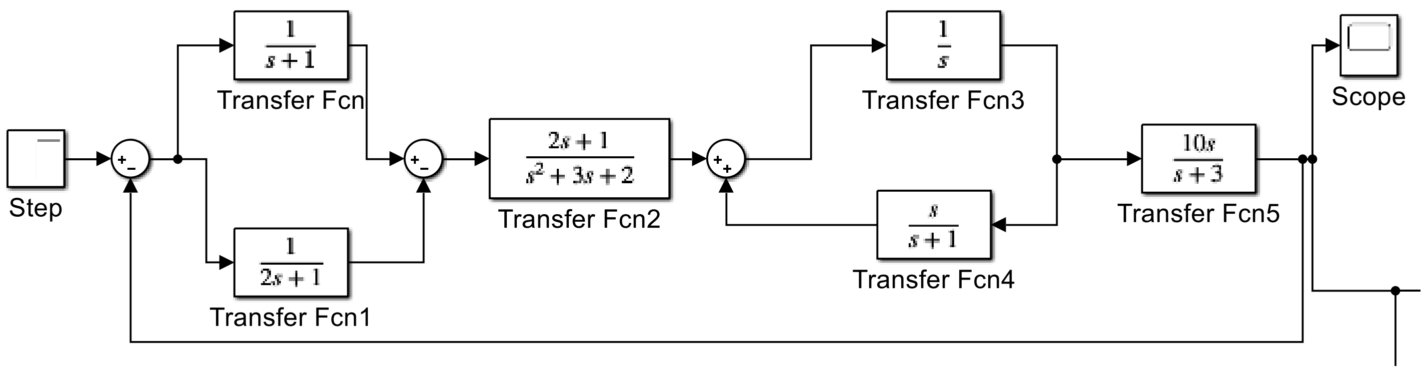


Fig.5. Schema bloc a sistemului inițial

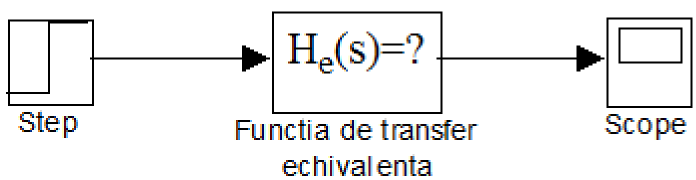


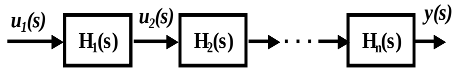
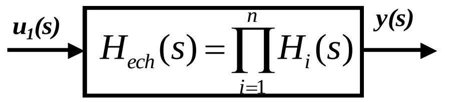
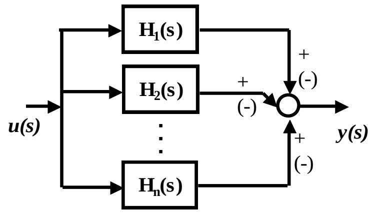
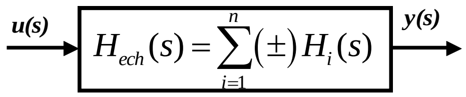
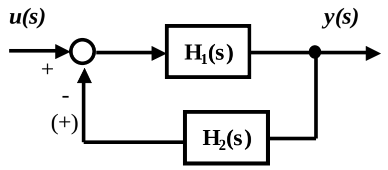
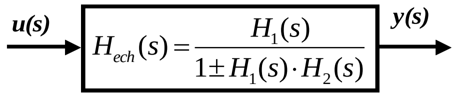
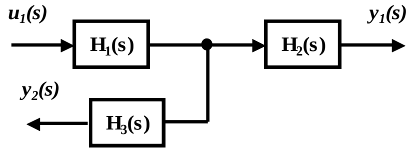
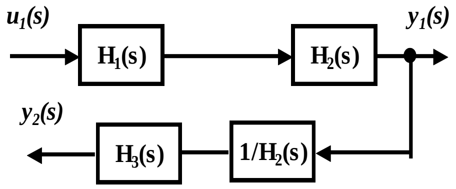
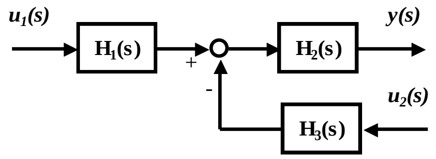
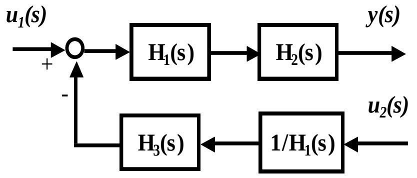
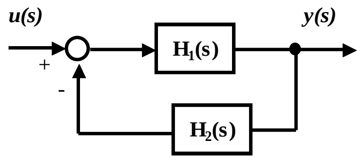
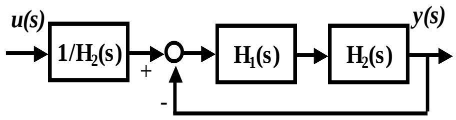
Fig.6. Schema bloc a sistemului echivalent

Anexa nr.1. Tabel de transformate Laplace

Transformata Laplace *F(s)*	Functia de timp *f (t)*
1	$\delta(t)$
e^{-nTs}	$\delta(t-nT)$
$\frac{1}{s}$	$1(t)$
$\frac{1}{s^2}$	t
$\frac{2!}{s^3}$	t^2
$\frac{(n-1)!}{s^n}$	t^{n-1}
$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}
$\frac{1}{s(s+a)}$	$\frac{1}{a}\left(u(t)-e^{-at}\right)$
$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$	$\frac{1}{(b-a)}\left(e^{-at}-e^{-bt}\right)$
$\frac{1}{s^2(s+a)}$	$\frac{1}{a}\left(t-\frac{1-e^{-at}}{a}\right)$
$\frac{s+b}{s^2(s+a)}$	$\frac{a-b}{a^2}u(t)+\frac{b}{a}t+\frac{1}{a}\left(\frac{b}{a}-1\right)e^{-at}$
$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-t}

Transformata Laplace *F(s)*	Functia de timp *f (t)*
$\frac{1}{s^3(s+a)}$	$\frac{1}{2a}\left(t^2-\frac{2}{a}t+\frac{2}{a^2}u(t)-\frac{2}{a^2}e^{-at}\right)$
$\frac{a}{s^2+a^2}$	$\sin at$
$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\cos at$
$\frac{1}{s(s+a)^2}$	$\frac{1}{a^2}\left[u(t)-(1+at)e^{-at}\right]$
$\frac{1}{s^2(s+a)^2}$	$\frac{t}{a^2}-\frac{2}{a^3}u(t)+\left(\frac{t}{a^2}+\frac{2}{a^3}\right)e^{-at}$
$\frac{a}{s(s^2+a^2)}$	$\frac{1}{a}\left(u(t)-\cos at\right)$
$\frac{a^2}{s^2(s^2+a^2)}$	$1-\frac{1}{a}\sin at$
$\frac{1}{(s+a)^2+b^2}$	$\frac{1}{b}e^{-at}\sin bt$
$\frac{s+a}{(s+a)^2+b^2}$	$e^{-at}\cos bt$
$\frac{1}{s(s+a)(s+b)}$	$\frac{1}{ab}\left(u(t)+\frac{b}{a-b}e^{-at}-\frac{a}{a-b}e^{-bt}\right)$

Anexa nr. 2. Reguli principale ale algebrei schemelor bloc

Nr crt	**Regula**	**Schema iniţială**	**Schema echivalentă**
1	Legarea în serie (cascadă)		
2	Cuplarea în derivaţie (paralel înainte)		
3	Cuplarea în buclă (paralel înapoi)		
4	Deplasarea unui punct de ramificaţie pe direcţia acţiunii (spre ieşire)		
5	Deplasarea unui punct de sumare contrar direcţiei acţiunii (spre intrare)		
6	Rigidizarea unei reacţii elastice		
7	Sumarea unor reacţii multiple