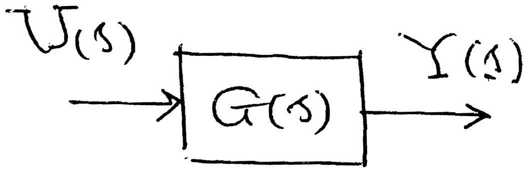
Übertragungsfunktion und Zustandsraumdarstellung

Beschreibung linearer SISO-Systeme:

- durch ihre Zustandsraumdarstellung;
- durch ihre Übertragungsfunktionen.

?? Zwei Fragen:

(1) Sind die Darstellung im Zustandsraum und die Darstellung desselben Systems mittels einer Übertragungsfunktion <u>immer</u> äquivalent?



$$\overset{?}{=} \quad \begin{cases} \dot{\underline{x}} = \underline{A}\,\underline{x} + \underline{b}\,u \\ y = \underline{c}^T \underline{x} \end{cases}$$

(2) Wie kann man aus der Übertragungsfunktion eine Zustandsraumdarstellung gewinnen?

$$\overset{?}{\Longrightarrow} \quad \begin{cases} \dot{\underline{x}} = \underline{A}\,\underline{x} + \underline{b}\,u \\ y = \underline{c}^T \underline{x} \end{cases}$$

Die beiden Fragen stehen im direkten Zusammenhang und lassen sich gemeinsam klären.

Man betrachte zu diesem Zweck zunächst eine Übertragungsfunktion, deren Zählerpolynom $Z(s) = 1$ ist:

$$U(s) \longrightarrow \boxed{\frac{1}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}} \longrightarrow Y(s)$$

Sie beschreibt folgende Differentialgleichung im Laplacebereich:

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 \dot{y} + a_0 y = u$$

Man führt n neue Variablen:

$$\left\{ \begin{aligned} x_1 &= y \\ x_2 &= \dot{y} = \dot{x}_1 \\ x_3 &= \ddot{y} = \dot{x}_2 \\ &\vdots \\ x_n &= y^{(n-1)} = \dot{x}_{n-1} \end{aligned} \right.$$

ein und kann dann für die Differentialgleichung

$$\dot{x}_n = -a_{n-1} x_n - \dots - a_1 x_2 - a_0 x_1 + u$$

schreiben.
Dieses Ergebnis ist auch in Matrizenform darstellbar!

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & \cdots & a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

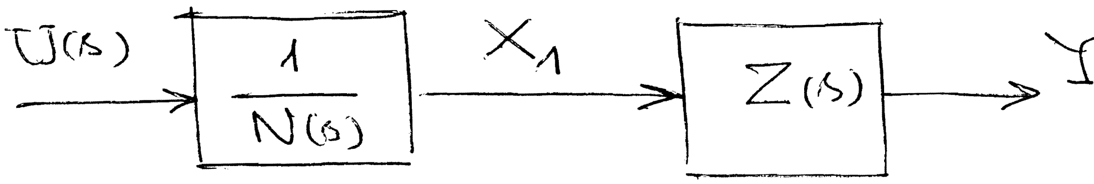
Die betrachtete Übertragungsfunktion $G(s) = \frac{1}{N(s)}$ kann also auf einfache Weise in obige Zustandsraumdarstellung umgewandelt werden.

Diese Zustandsraumdarstellung läßt sich auf allgemeine Übertragungsfunktionen erweitern:

$$U(s) \longrightarrow \boxed{G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}} \longrightarrow Y(s)$$

Nur der Fall $\underline{m < n}$ wird betrachtet, d.h. das System soll keinen Durchgang aufweisen.

Man zerlegt die Übertragungsfunktion in zwei Teile:



Der erste Teil wurde bereits in Zustandsraumdarstellung umgewandelt. Bleibt der zweite:

$$Z(s) = b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0$$

bzw:

$$y = b_m \underbrace{x_1^{(m)}}_{x_{m+1}} + b_{m-1} \underbrace{x_1^{(m-1)}}_{x_m} + \dots + b_1 \underbrace{\dot{x}_1}_{x_2} + b_0 \underbrace{x_1}_{x_1}$$

$$= b_m x_{m+1} + b_{m-1} x_m + \dots + b_1 x_2 + b_0 x_1$$

Mit diesem Ergebnis gilt für die Ausgangsgröße:

$$y = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & \dots & b_{m-1} & b_m & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}$$

Faßt man die Ergebnisse beider Teile zusammen, so ergibt sich das Umwandlungsschema:

$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} = \frac{Y}{U}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}} = \underline{A}\,\underline{x} + \underline{b}\,u \\ y = \underline{c}^T \underline{x} \end{cases}$$

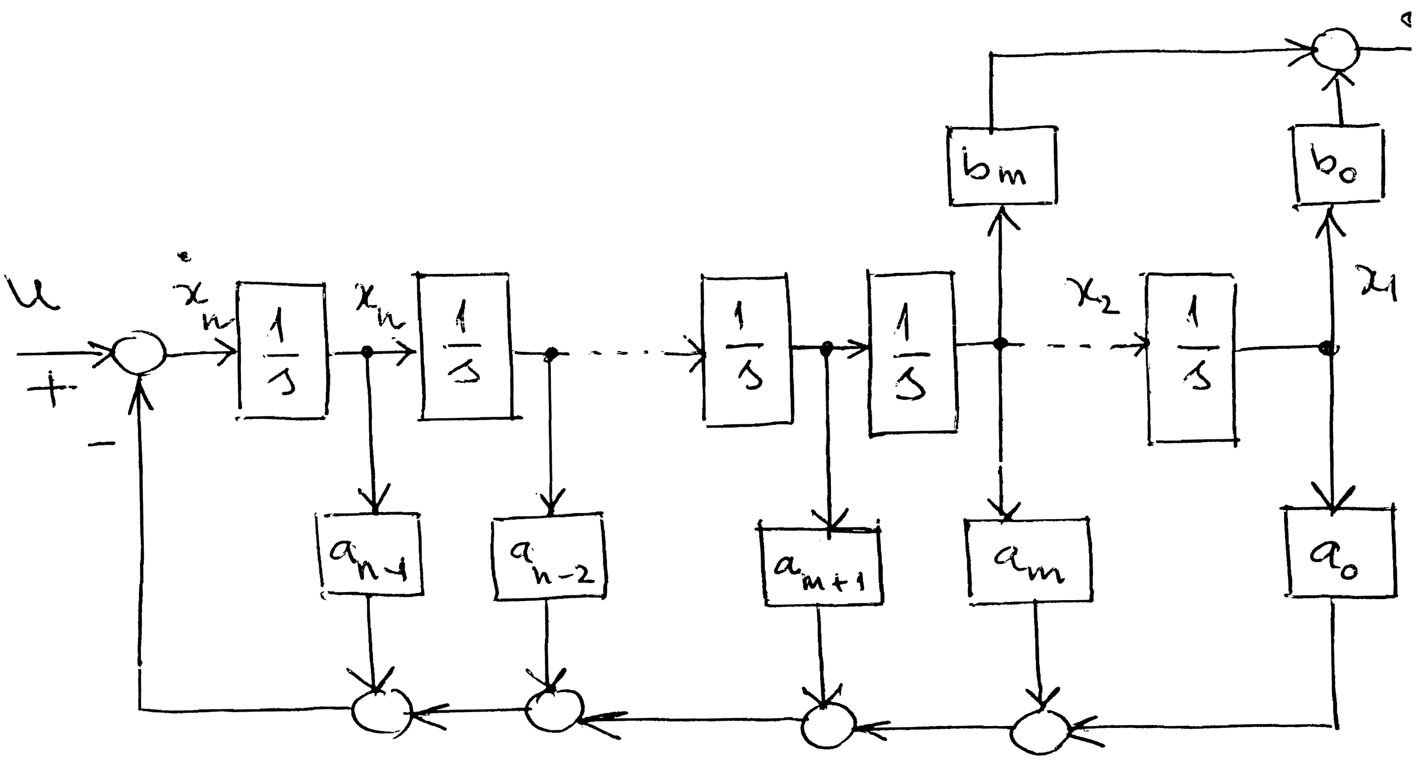
mit

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & a_{n-1} \end{bmatrix} \qquad \underline{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{c}^T = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & \dots & b_m & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Die obige Zustandsraumdarstellung wird als Regelungsnormalform oder <u>Steuerungsnormalform</u> bezeichnet. Sie wird im weiteren noch eine wichtige Rolle spielen.

Ein Vorteil der Steuerungsnormalform ist ihr anschauliches Strukturbild:



Man erkennt aus dem Strukturbild, daß ein System in Steuerungsnormalform nicht unbedingt beobachtbar ist – beispielsweise wenn $a_0 = b_0 = 0$ gilt. Es läßt sich aber zeigen, daß es immer vollständig steuerbar ist.

Obiges Schema erlaubt die Umwandlung einer Übertragungsfunktion in eine Zustandraumdarstellung und umgekehrt.

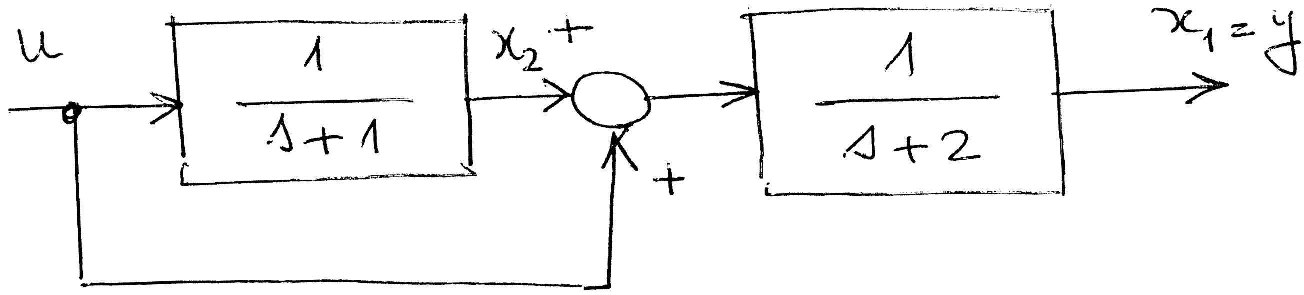
Bleibt die Frage:

„Sind beide Beschreibungsformen immer äquivalent zueinander?"

Wie das nächste Beispiel illustriert, ist das nicht der Fall.

BEISPIEL

↳ Betrachtet wird das System:



mit den Zustandsgleichungen:

$$\left\{\begin{aligned} \dot{x}_2 &= -x_2 + u \\ \dot{x}_1 &= -2x_1 + x_2 + u \\ y &= x_1 \end{aligned}\right. \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \dot{\underline{x}} &= \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \underline{x} \end{aligned}$$

und der Übertragungsfunktion:

$$G(s) = \left(\frac{1}{s+1} + 1 \right) \cdot \frac{1}{s+2} = \frac{\cancel{s+2}}{(s+1)(\cancel{s+2})} = \frac{1}{s+1}$$

Offensichtlich sind beide Systembeschreibungen nicht äquivalent. Der Grund hierfür ist darin zu finden, daß sich in der Übertragungsfunktion ein Pol und eine Nullstelle kompensieren. Des weiteren ist das System nicht vollständig steuerbar:

$$\underline{M}_s = [\,\underline{b}\ \ \underline{A}\,\underline{b}\,] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Die Umwandlung einer Übertragungsfunktion ~~in~~ eine Zustandsraumdarstellung und umgekehrt ist – wie obiges Beispiel illustriert – nicht möglich, wenn beide Darstellungen charakteristische Polynome unterschiedlicher Ordnung besitzen.

In obigem Beispiel ist das darauf zurückzuführen, daß das System nicht vollständig steuerbar ist.

Ganz allgemein lassen sich zu dieser Problematik zwei Sätze beweisen.

Satz 1

Die Beschreibungsformen eines linearen SISO-Systems mittels Zustandsgrößen und durch eine Übertragungsfunktion sind genau dann gleichwertig, wenn das System vollständig steuerbar und vollständig beobachtbar ist.

$\boxed{\text{SATZ 2}}$

Ein lineares SISO-System ist genau dann vollständig steuerbar und vollständig beobachtbar, wenn die Übertragungsfunktion in der alle gemeinsamen Pol und Nullstellen gekürzt wurden, einen Nennergrad besitzt, der der Anzahl der Zustandsgrößen entspricht.

Die Steuerungsnormalform ist nicht die einzige Zustandsraumdarstellung eines Systems, die direkt aus der Übertragungsfunktion ablesbar ist.

Eine weitere ist die Beobachtungsnormalform

$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

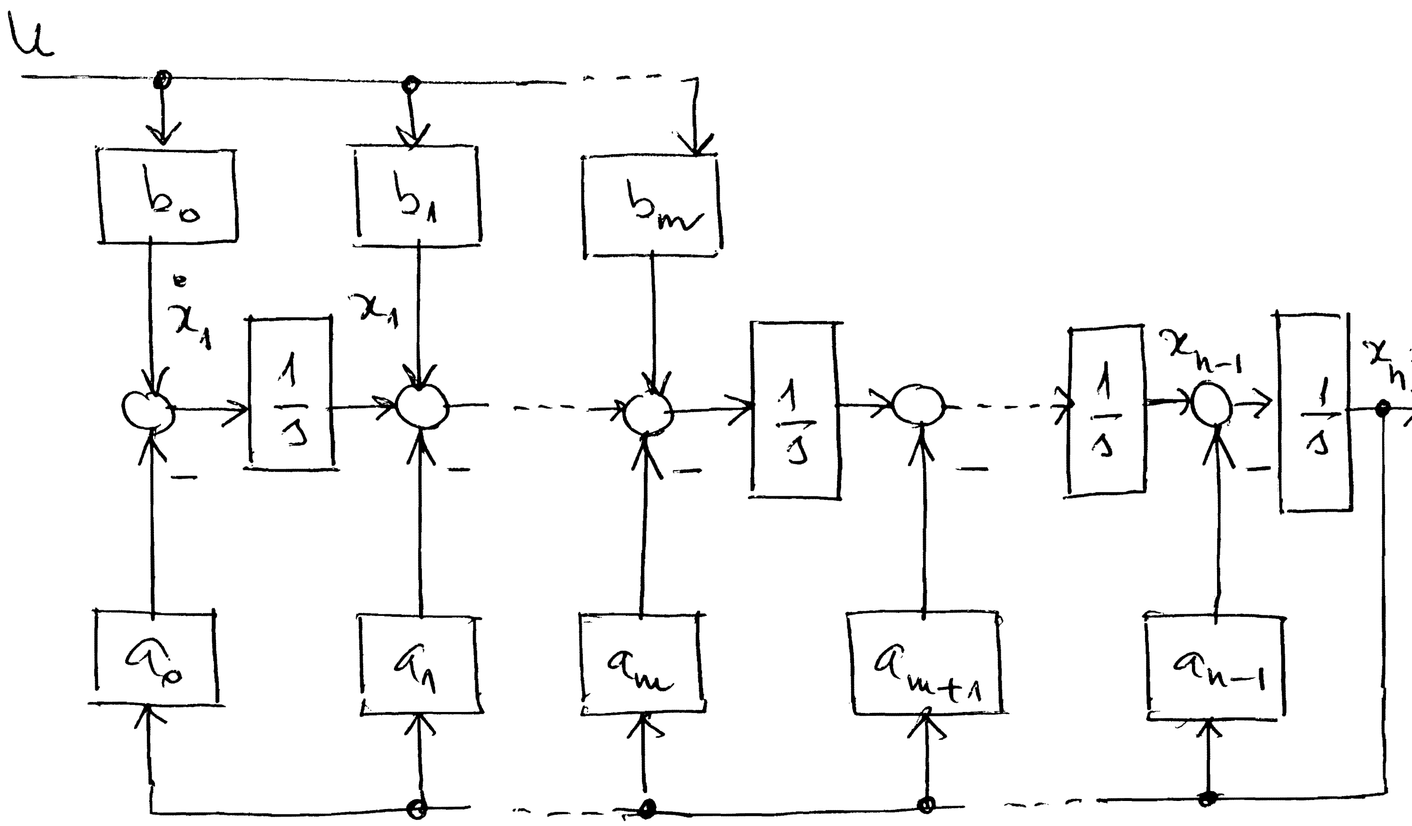
$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}} = \underline{A}\,\underline{x} + \underline{b}\,u \\ \underline{y} = \underline{c}^T x \end{cases}, \text{ mit:}$$

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} \qquad \underline{b} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_m \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{c}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Wie zu der Steuerungsnormalform gehört auch zur Beobachtungsnormalform ein einfaches und anschauliches Strukturbild:



Ein System in Beobachtungsnormalform ist, wie sich beweisen läßt, immer vollständig beobachtbar. Vollständig steuerbar ist es jedoch nicht immer – beispielweise, wenn $a_0 = b_0 = 0$ gilt.

Die Beobachtungsnormalform kann auch aus jeder beliebigen Zustandsraumdarstellung gewonnen werden, wenn das System vollständig beobachtbar ist – und nur dann. Dies geschieht mittels einer Transformation,

$$\underline{x} = \underline{T}\,\underline{\tilde{x}}$$

die eine Systemdarstellung in eine andere umwandelt.

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}} = \underline{A}\,\underline{x} + \underline{b}\,u \\ y = \underline{c}^T \underline{x} \end{cases} \quad \overset{\underline{x} = \underline{T}\,\tilde{\underline{x}}}{\longleftrightarrow} \quad \begin{cases} \dot{\tilde{\underline{x}}} = \tilde{\underline{A}}\,\tilde{\underline{x}} + \tilde{\underline{b}}\,u \\ y = \tilde{\underline{c}}^T \tilde{\underline{x}} \end{cases}$$

mit
$$\tilde{\underline{A}} = \underline{T}^{-1}\underline{A}\,\underline{T}$$
$$\tilde{\underline{b}} = \underline{T}^{-1}\underline{b}$$
$$\tilde{\underline{c}}^T = \underline{c}^T\underline{T}$$

Originalsystem | Transformiertes System

Zur Erinnerung:

- Eigenwerte, Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit sind invariant gegenüber regulären Transformationen ($\det \underline{T} \neq 0$)
- Ein- und Ausgangswerte u und y sind in beiden Systemen gleich, nur die Zustandsvariablen x_i und $\tilde{x}_i$ unterscheiden sich.